

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ПРИБЛИЖЕННЫЕ  
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОЖНЫХ  
РАДИО-  
ТЕХНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ

4

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ**

---

**ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

---

**СЛОЖНОГО**

---

**ЭКСПЕРИМЕНТА**

---

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ  
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОЖНЫХ  
РАДИО-  
ТЕХНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ**

**4**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
СЛОЖНОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ**

---

**ИЗДАНИЕ  
В ПЯТИ  
ТОМАХ**

**КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1986**

# ОБЕСПЕЧЕНИЕ

---

# СЛОЖНОГО

---

# ЭКСПЕРИМЕНТА

---

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ  
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОЖНЫХ  
РАДИО-  
ТЕХНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ**

# 4

УДК 518.12 (075.8); 519.95 : 518.0

**Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 4. Приближенные методы решения задач математического моделирования сложных радиотехнических систем / Белов Ю. А., Козлов Н. Н., Ляшко И. И., Макаров В. Л., Цитрицкий О. Е.**— Киев : Наук. думка, 1986.— 264 с.

В данном томе освещены вопросы, связанные с дискретизацией задач, которые ставятся при исследовании сложных систем. Изложены численные методы решения обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, методы восстановления функций-сигналов по конечному множеству данных, рассмотрены вопросы, связанные с математической декомпозицией задач.

Для специалистов, работающих в области прикладной математики, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Ил. 4. Табл. 5. Библиогр. : с. 255—261 (154 назв.).

#### Авторы

Ю. А. БЕЛОВ, Н. Н. КОЗЛОВ, И. И. ЛЯШКО,  
В. Л. МАКАРОВ, О. Е. ЦИТРИЦКИЙ

Рецензенты *Д. И. Мартынюк, В. К. Задирака*

Под общей редакцией акад. АН УССР *И. И. Ляшко*

**Редакция физико-математической литературы**

М 1502000000-484  
М221 (04)-86 подписное

© Издательство «Наукова думка», 1986

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое моделирование явлений, процессов и конструкций является в настоящее время эффективным средством теоретического анализа задач, выдвигаемых наукой и техникой. Вычислительный эксперимент на ЭВМ — новый и во многих практически важных случаях единственный способ их исследования. В то же время, как показывает опыт решения крупных прикладных проблем, только вычислительный эксперимент может обеспечить те высокие требования, которые предъявляет практика к точности результатов теоретических исследований, поскольку полученная при этом информация является основой при проектировании сложных объектов новой техники [11, 99, 100]. Однако успешное решение инженерно-конструкторских задач на основе математического моделирования зависит как от моделей, которыми описываются конструкция и структура проектируемых технических систем, так и от методов их исследования.

В первых трех томах изложены некоторые вопросы теории построения математических моделей радиотехнических систем, реализуемых на ЭВМ. Настоящий том посвящен приближенным методам решения математических задач, которые возникают при исследовании и проектировании объектов новой техники. Рассматриваемые в нем вопросы, по существу, лежат в основе вычислительной математики, для которой характерна реализация математических моделей физики, техники, механики и других областей науки в форме дифференциальных и интегральных уравнений.

В данный том включены общие методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и специальные методы, учитывающие особенности рассматриваемых задач. Том состоит из трех глав.

Гл. I посвящена приближенным методам решения нелинейных двухточечных краевых задач и жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод стрельбы — один из самых распространенных численных методов решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Описаны также наиболее часто употребляемые в вычислительной практике алгоритмические схемы данного метода, отмечены характерные трудности, возникающие при их реализации на ЭВМ, и изложены некоторые разработанные к настоящему времени подходы, позволяющие в определенных случаях эффективно преодолеть эти трудности.

Построение и обоснование надежных численных методов решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений — одна из актуальных проблем вычислительной математики. Это связано с тем, что, с одной стороны, так называемые жесткие задачи очень часто ставятся на практике, с другой — использование традиционных подходов для их решения, малоэффективно. В настоящее время разработаны численные методы, ориентированные на решение жестких задач, однако, к сожалению, они не всегда удовлетворяют практическим запросам, поскольку имеют свою область эффективного применения. В гл. I дается краткая характеристика численных методов, ориентированных на решение жестких задач, и описываются новые численные методы. Здесь приводятся конкретные вычислительные процедуры решения жестких задач, их обоснование, сведения о программной реализации рассматриваемых численных методов и результаты вычислительных экспериментов.

Гл. II посвящена приближенным методам решения интегральных уравнений с негладкой входной информацией и задаче восстановления функций-сигналов по конечному множеству данных. В ней рассмотрены интегральные уравнения второго рода с постоянными границами интегрирования. В случае линейных и нелинейных уравнений выводятся условия, при которых решения уравнений принадлежат дробным соболевским пространствам. Для приближенного решения исходного уравнения получены разностные схемы путем специального усреднения ядра и правой части уравнения. Доказывается сходимость приближенного решения к точному при минимальных требованиях гладкости на правую часть и ядро (для линейного уравнения) и на подынтегральное (для нелинейного уравнения).

Кроме того, в обобщенном виде излагаются задачи интерпретации наблюдений по неполным данным и восстановления функций-сигналов по их конечному множеству. Восстановление сигналов рассматривается как некорректно поставленная задача математической физики. На основе разрабатываемых методов решения таких задач изучаются эффективные пути восстановления сигналов. Разрабатываются алгоритмы восстановления, реализованные на ЭВМ и показавшие свою эффективность при решении практических задач по радио- и гидролокации, техники связи, измерительной техники, акустики, спектроскопии и т. д.

Следует отметить, что, хотя в данной главе излагается детерминированная постановка, в настоящее время получены результаты, обобщающие изложенные в ней методы на случай данных, пораженных шумами, и вырожденных матриц.

В гл. III рассматриваются вопросы, связанные с решением задач большой размерности. Как известно, основным приемом исследования больших систем являются декомпозиция и агрегирование. Декомпозиция состоит в разложении исходной задачи на ряд независимых подзадач, а агрегирование — в замене какой-либо группы переменных, характеризующих состояние системы, одной переменной, именуемой агрегатом. При этом можно идти двумя путями: выделять классы задач и развивать строгие процедуры декомпозиции и агрегирования с выполнением требования полной эквивалентности исходных и преобразованных задач; развивать математически строгие процедуры декомпозиции и агрегирования на основе отказа от полной эквивалентности. В данной главе обсуждается первый подход.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Самарскому, многочисленные замечания которого существенно влияли на формирование математических направлений их исследований и выбор концепций, положенных в основу монографии. Они благодарны С. А. Касьянку за полезные обсуждения некоторых параграфов, а также В. К. Задираке и Д. И. Мартынюку за ряд замечаний при рецензировании рукописи.



## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многие важные задачи из самых различных областей науки и техники приводят к краевой задаче для системы  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad g(u(0), u(1)) = 0, \quad (1)$$

где  $f: [0,1] \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $g: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  — заданные отображения,  $u: [0,1] \rightarrow R^n$  — искомая вектор-функция.

Теория численных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой одно из наиболее интенсивно развивающихся направлений вычислительной математики. С ее помощью изучаются вопросы построения и анализа дискретного аналога исходной задачи — как правило, конечномерной системы линейных или нелинейных уравнений специфической структуры (например, разностной схемы) и вопросы, связанные с разработкой и реализацией алгоритма решения этой конечномерной системы.

Наиболее распространенные численные методы, применяемые для решения задачи (1), изложены в работах [30, 46, 68, 69, 75, 78, 97, 104, 124]. Достаточно полный обзор существующих методов и их классификация даны в работах [126, 128]. Условно методы можно разделить на три группы по способу аппроксимации искомого решения. К первой группе относятся методы, основанные на локальной аппроксимации в выбранных точках отрезка интегрирования (метод конечных разностей, метод стрельбы). К методам второй группы относятся интерполяционные методы, включая метод конечных элементов, где применяется кусочно-полиномиальная аппроксимация на подотрезках отрезка интегрирования. Третью группу составляют методы, в которых решение аппроксимируется на всем отрезке интегрирования (метод рядов, проекционные методы).

Одним из самых популярных методов решения краевой задачи (1) является метод стрельбы (метод пристрелки). Описание этого метода с анализом его преимуществ и недостатков можно найти в известных учебных пособиях [46, 69, 74]. Вопрос о сходимости некоторых итерационных пристрелочных процессов исследован в работе [124]. Значительное место методу стрельбы уделено в работе [138]; в ней

также изложен и теоретически обоснован метод параллельной стрельбы. В работе [149] описаны модификации методов, сочетающие стрельбу с техникой продолжения по параметрам. Детальный анализ применяемых в настоящее время алгоритмов стрельбы проведен в работе [104].

Трудности реализации на ЭВМ метода стрельбы для краевых задач, которые ставятся в теории оптимального управления, и некоторые способы их преодоления рассмотрены в монографиях [82, 114]. Наконец, методу стрельбы и различным его модификациям посвящено большое количество журнальных публикаций, в частности [14, 36, 39, 44, 48, 85—87, 90, 96, 105, 129—131, 148, 150, 151].

Основной вариант метода стрельбы заключается в сведении задачи 1) к системе  $n$  уравнений

$$\Phi(x) \equiv g(x, U(1, x)) = 0 \quad (2)$$

с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$ , где  $U(t, x)$  — решение  $u(t)$  задачи Коши  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(0) = x^0$ . Система (2) называется системой стыковки (сшивания). Решается она чаще всего с помощью итерационной процедуры вида

$$x^{k+1} = x^k - \eta_k A^k \Phi(x^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Здесь  $A^k$  — некоторая матрица размера  $n \times n$ ,  $\eta_k > 0$  — «длина итерационного шага». Если, например, используется метод Ньютона, то в (3) берется  $A^k = (\Phi'(x^k))^{-1}$ ,  $\eta_k = 1$ .

Размерность системы стыковки равна порядку дифференциальной системы, т. е. сравнительно невелика, а если граничными условиями задачи (1) явно заданы какие-нибудь компоненты искомого решения в точке  $t = 0$ , то система (2) легко преобразуется к системе еще меньшей размерности. В этом состоит преимущество метода стрельбы. Однако на пути практического применения этого метода могут возникнуть трудности. Одна из них связана с проблемой начального приближения. Для успешной реализации метода вектор  $x^0$  в процедуре (3) нужно подобрать так, чтобы задача Коши  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(0) = x^0$  имела ограниченное решение  $u^0(t) = U(t, x^0)$  на всем отрезке  $[0, 1]$ , причем оно должно быть расположено «не слишком далеко» от искомого решения  $u^*(t)$  задачи (1). Только при этих условиях можно рассчитывать на то, что процесс  $\{x^k\}$  будет сходиться к корню  $x^* \equiv u^*(0)$  системы (2), а последовательность пристрелочных траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  — равномерно сходиться к решению  $u^*(t)$ . Если траектории дифференциальной системы достаточно сильно реагируют на изменения начальных значений и могут «быстро расти», то найти приемлемый стартовый элемент  $x^0$  путем простого перебора различных вариантов обычно не удастся. В этой ситуации для нахождения  $x^0$  часто используют метод продолжения по параметру.

Алгоритмы, в которых процедура стрельбы комбинируется с процедурой продолжения по параметру, предлагались и исследовались во многих работах. Отметим, в частности, работы [85, 96, 104, 105, 129, 130, 143, 148, 149]. Основа этих алгоритмов состоит в следующем.

Задача (1) возмущается путем введения параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ , причем в общем случае параметризуются как операторы  $f, g$ , так и отрезок интегрирования  $[0, 1]$ :

$$\dot{u} = \hat{f}(t, u; \lambda), \quad 0 \leq t \leq T(\lambda), \quad \hat{g}(u(0), u(T(\lambda)); \lambda) = 0, \quad (4)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l).$$

При некотором  $\lambda = \mu^{(1)}$  задача (4) тождественна невозмущенной. Система стыковки для задачи (4) записывается в виде

$$\hat{\Phi}(x; \lambda) \equiv \hat{g}(x, \hat{U}(T(\lambda), x; \lambda); \lambda) = 0; \quad (5)$$

при  $\lambda = \mu^{(1)}$  она совпадает с системой (2). При некотором другом значении  $\lambda = \mu^{(0)}$  система (5) по сравнению с системой (2) должна быть более легкой для решения. Параметризация поэтому проводится с таким расчетом, чтобы условия сходимости применяемого итерационного процесса для системы (5) при  $\lambda = \mu^{(0)}$  были менее ограничительными, чем для (2). Процесс продолжения по параметру — это последовательное решение систем

$$\Phi^{(m)}(x) \equiv \hat{\Phi}(x; \lambda^{(m)}) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$\lambda^{(0)} = \mu^{(0)} < \lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(M)} = \mu^{(1)},$$

причем в качестве начального приближения на шаге  $m > 0$  берется решение, найденное на предыдущем шаге.

Метод продолжения по параметру — очень полезен при отыскании «хороших» начальных приближений, однако его применение не лишено своих проблем. Во-первых, нет пока достаточно надежной общей методики параметризации. Построение возмущенной задачи (4) может оказаться очень трудным процессом, включающим доказательство существования и непрерывной зависимости от параметров решения этой задачи. Еще большие трудности появляются в случае неоднозначной разрешимости исходной задачи (1). Во-вторых, сложным является вопрос о выборе точек  $\lambda^{(m)}$  и их числа  $M$ . Заметим, что использование алгоритмов продолжения оправдано только тогда, когда значение  $M$  получается не очень большим.

Если решения задач Коши обладают повышенной чувствительностью по отношению к начальному условию, то метод стрельбы, даже в комбинации с методом продолжения по параметру, оказывается практически непригодным, так как в этом случае для получения удовлетворительного приближенного решения краевой задачи (1) корень системы (2) нужно найти с точностью, которой невозможно достичь при реальном счете на ЭВМ. Не исключена даже ситуация, когда решение задачи Коши при любых (в классе машинных чисел) начальных данных является быстрорастущим, и вследствие этого ни одна пристрелочная траектория не может быть реально вычислена на всем отрезке интегрирования. Для преодоления этих трудностей в случае линейных краевых задач в литературе предложен ряд достаточно эффективных методов: метод ортогонализации [45], метод дифференциальной ортогональной прогонки [1, 2, 69] и метод направленной орто-

тонализации [28], устойчивый к ошибкам округлений [29]. В случае нелинейных краевых задач большое распространение получил метод параллельной (множественной) стрельбы [30, 44, 86, 87, 104, 131, 136, 138, 144]. Так называемый односторонний вариант этого метода сводится к разбиению области интегрирования точками  $s_0 = 0 < s_1 \leq \dots \leq s_0 = 1$  и решению системы параллельной стыковки

[illegible]

относительно неизвестных  $x_i^{(q)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $q = 0, 1, \dots, Q - 1$ . Здесь  $U(s_{q+1}, s_q, x)$  — решение задачи Коши  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(s_q) = x$  в точке  $s_{q+1}$ . Таким образом, левая часть системы (6) получается в результате решения  $Q$  задач Коши на подотрезках  $[s_q, s_{q+1}]$ . Если длины подотрезков достаточно малы, то каждая из указанных задач Коши будет практически устойчива. Невыгодным, однако, здесь оказывается то, что преодоление трудностей, связанных с неустойчивостью задач Коши, достигается ценой увеличения размерности системы стыковки, которая равна  $Qn$ . Использование двустороннего варианта метода параллельной стрельбы позволяет сократить ее вдвое [86]. Тем не менее при больших значениях  $Q$  реализация процедур параллельной стрельбы очень трудоемка. Дополнительные операции требуются для выбора подходящего разбиения  $\{s_q\}$ , а также для отыскания «хорошего» начального приближения.

В данной главе предлагаются новые модификации метода стрельбы для решения нелинейных краевых задач вида (1) [40, 41]. При создании этих модификаций намечались цели. Первая — построить итерационный процесс стрельбы, который бы: а) был приемлем в условиях возможного быстрого роста пристрелочных траекторий, б) не требовал разрешимости задач Коши обязательно на всем отрезке интегрирования), в) был допустим в случае неединственности решения краевой задачи и г) сходиллся с «очень грубого» начального приближения. Вторая — для случая сильной неустойчивости задач Коши сконструировать алгоритм, в котором процедура стрельбы применяется неоднократно на различных подотрезках отрезка интегрирования.

## **§ 1. Метод стрельбы с прерыванием пристрелочных траекторий при их выходе из некоторого множества**

**Метод стрельбы и проблема начального приближения. Стрельба с прерыванием траекторий.** Пусть дана система  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$g(u(0), u(1)) = 0, \quad (1.2)$$

где  $f: [0, 1] \times R^n \rightarrow R^n$  и  $g: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  — заданные нелинейные операторы,  $u: [0, 1] \rightarrow R^n$  — искомая непрерывная вектор-функция. Будем предполагать, что операторы  $f$ ,  $g$  непрерывно дифференцируемы.

Нелинейная краевая задача вида (1.1), (1.2) может быть разрешима неоднозначно. Такая ситуация довольно часто встречается. Однако обычно, исходя из содержательного смысла задачи, удается ввести дополнительные условия, выделяющие единственное решение. Будем считать, что такие условия записываются в виде

$$u(t) \in G(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.3)$$

где  $G(t)$  при каждом  $t$  — некоторое множество из  $R^n$ .

Таким образом, предположим, что краевая задача (1.1), (1.2) имеет решение  $u^*(t)$ , удовлетворяющее дополнительным условиям (1.3), и других решений нет. Кроме того, предположим, что если  $u^k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , есть решение возмущенной краевой задачи (1.1) — (1.3)  $g(u(0), u(1)) = \Theta^k$ , то сходимость  $\Theta^k \rightarrow 0$  влечет за собой равномерную относительно  $t \in [0, 1]$  сходимость  $u^k(t) \rightarrow u^*(t)$ . Таким образом, имеем краевую задачу (1.1) — (1.3), решение  $u^*(t)$  которой существует, единственно и устойчиво по отношению к граничным условиям (1.2).

*Замечание 1.1.* Поскольку без дополнительных условий (1.3) краевая задача может иметь несколько решений, причем каждое из них может быть неустойчиво к возмущениям граничных условий (1.2), то ее следует отнести к классу некорректно поставленных задач [109]. Один из основных способов регуляризации, предложенный А. Н. Тихоновым, заключается в сужении области возможных решений до множества корректности. Введение условий (1.3) соответствует этому подходу. Роль множества корректности в данном случае играет множество всех решений дифференциальной системы (1.1), удовлетворяющих условиям (1.3).

Для решения поставленной задачи применим метод стрельбы. Обозначим через  $U(t, x)$  решение задачи Коши  $u = f(t, u)$ ,  $u(0) = x \in R^n$  в точке  $t$ . Рассмотрим так называемую систему стыковки

$$\Phi(x) \equiv g(x, U(1, x)) = 0, \quad (1.4)$$

систему  $n$  нелинейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Свойства стыковочного оператора  $\Phi$  зависят от свойств оператора  $g$  граничных условий и оператора  $U$ . По предположению  $g$  непрерывно дифференцируем. Оператор  $U$ , называемый оператором сдвига по траекториям системы  $u = f(t, u)$ , также непрерывно дифференцируем, поскольку есть предположение о непрерывной дифференцируемости оператора  $f$  [65, 110]. Следовательно, оператор  $\Phi$  системы стыковки (1.4) непрерывно дифференцируем. Важно при этом отметить следующее обстоятельство. Если

$$\sup_{0,1] \times R^n} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\| = \infty,$$

то задача Коши  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(0) = x$ , разрешима не обязательно на всем отрезке интегрирования  $[0, 1]$ , т. е. может существовать точка  $t_\infty \in (0, 1]$  такая, что

$$\lim_{t \rightarrow t_\infty} \|U(t, x)\| = \infty.$$

Поэтому оператор  $U$ , вообще говоря, является неограниченным (т. е. может отображать ограниченное множество на неограниченное) и область его определения  $\text{dom } U$  не совпадает с пространством  $[0, 1] \times R^n$ . Получается, что и оператор  $\Phi$  системы стыковки в общем случае — неограничен и определен не для всех  $x \in R^n$ .

По методу стрельбы для нахождения решения  $u^*(t)$  краевой задачи надо найти корень  $x^* = u^*(0)$  системы стыковки (1.4) и вычислить соответствующую ему траекторию. Поиск  $x^*$  осуществляется чаще всего с помощью следующей итерационной схемы:

$$x^{k+1} = x^k - \eta_k A^k \Phi(x^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

Здесь  $A^k$  — некоторая матрица размера  $n \times n$ ,  $\eta_k \geq 0$  — итерационный параметр.

Если в схеме (1.5) положим

$$\eta_k = 1, \quad A^k = (\Phi'(x^k))^{-1},$$

где  $\Phi'(x)$  — производная оператора  $\Phi$  в точке  $x$ , то получим метод Ньютона. Отличительной особенностью этого метода является его высокая скорость сходимости, имеющая квадратичный характер [54, 80, 114]. Однако условия, гарантирующие сходимость, как известно, довольно жесткие и на практике метод Ньютона применяется только при наличии очень хорошего начального приближения  $x^0$  к  $x^*$ . Никакой дополнительной информации для непосредственного выбора такого приближения в методе стрельбы обычно нет. Поэтому для решения системы стыковки применяются методы, сходящиеся при более слабых требованиях к  $x^0$ . Среди них отметим метод градиентного спуска для минимизации функции невязки  $\|\Phi(x)\|^2$  [35, 74, 88, 124] и модифицированный метод Ньютона (называемый еще демпфированным методом Ньютона) [88, 124]. Оба метода вписываются в схему (1.5).

В соответствии с методом градиентного спуска матрица  $A^k$  в схеме (1.5) задается формулой

$$A^k = \Phi'(x^k)^T,$$

а «длина шага»  $\eta_k$  определяется как решение одномерной экстремальной задачи

$$\|\Phi(x^k - \eta \Phi'(x^k)^T \Phi(x^k))\| \rightarrow \min_{\eta \geq 0}.$$

Скорость сходимости этого метода невелика, поэтому его применяют в начале итерационного процесса. Затем, когда  $x^k$  достаточно приблизится к  $x^*$ , целесообразно переключаться на метод Ньютона.

В модифицированном методе Ньютона берется

$$A^k = (\Phi'(x^k))^{-1}$$

(т. е. так же, как и в обычном методе Ньютона), значение же  $\eta_k$  определяется, как в градиентном методе — в результате минимизации невязки:

$$\|\Phi(x^k - \eta(\Phi'(x^k))^{-1}\Phi(x^k))\| \rightarrow \min_{\eta \geq 0}.$$

*Замечание 1.2.* Как показано в работе [114, с. 382], в некоторых случаях для ускорения сходимости модифицированного метода Ньютона невязку следует определять не через единую норму  $\|\cdot\|$ , а с помощью некоторой локальной нормы  $k$ -й итерации:

$$\|\Phi(x)\|_k = (d_{1,k}(\Phi_1(x))^2 + \dots + d_{n,k}(\Phi_n(x))^2)^{1/2},$$

где

$$d_{ik} = \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \Phi_i(x^k)}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Известно, что использование в алгоритмах стрельбы градиентных методов и различных модификаций метода Ньютона полностью проблему начального приближения не решает. Основные требования, предъявляемые к начальному вектору  $x^0$ , состоят в следующем. Необходимо, во-первых, чтобы задача Коши  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(0) = x^0$ , была разрешима на всем отрезке  $[0, 1]$ , иначе невозможно вычислить  $\Phi$  в  $x^0$  ( $x^0 \notin \text{dom } \Phi$ ) и сделать первый итерационный шаг. Во-вторых, начальная пристрелочная траектория  $u^0(t) = U(t, x^0)$  должна удовлетворять дополнительным условиям (1.3) краевой задачи. В противном случае нельзя рассчитывать на сходимость пристрелочных траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  к решению  $u^*(t)$  даже при наличии сходимости  $\Phi(x^k) \rightarrow 0$ .

Указанные требования к  $x^0$  можно записать в виде  $x^0 \in X$ , где множество

$$X = \{x \in R^n : (1, x) \in \text{dom } U, U(t, x) \in G(t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Заметим, что система стыковки  $\Phi(x) = 0$  вне множества  $X$  может иметь корни, отличные от искомого  $x^*$ ,  $x^* = u^*(0) \in X$ . Поэтому, если известно какое-нибудь начальное приближение  $x^0 \in X$ , итерационный процесс  $\{x^k\}$  для отыскания  $x^*$  следует строить, не выходя за пределы множества  $X$ . Учитывая это, построим следующий модифицированный процесс Ньютона:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \eta_k z^k, \quad z^k = (\Phi'(x^k))^{-1} \Phi(x^k), \\ \eta_k &\in \arg \min_{\eta \in P_k} \|\Phi(x^k - \eta z^k)\|, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$P_k = \{\eta \geq 0 : x^k - \eta z^k \in X\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Докажем теорему о его сходимости.

*Замечание 1.3.* В частном случае, когда система уравнений  $\Phi(x) = 0$  разрешима однозначно и множество  $\{x : \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x^0)\|\}$  ограничено, сходимость процесса (1.6) с  $X = R^n$  при некоторых предположениях установлена в работе [114, с. 380].

**Теорема 1.1.** Для того чтобы последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$ , где  $\{x^k\}$  — итерационный процесс (1.6) со стартовым вектором  $x^0 \in X$ , равномерно сходилась к решению  $u^*(t)$  краевой задачи (1.1) — (1.3) достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) множество

$$X_0 = \{x \in X : \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x^0)\|\}$$

было замкнуто и ограничено;

2)  $\exists \Delta > 0, \forall x \in X_0, \forall y \in \{y \in \text{dom } \Phi :$

$$\|y - x\| < \Delta\} \setminus X_0, \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(y)\|;$$

3)  $\forall x \in X_0, \det(\Phi'(x)) \neq 0$ , причем

$$\exists N < \infty, \sup_{x_0} \|\Phi'(x)\|^{-1} \leq N;$$

4) оператор  $\Phi$  имел ограниченную вторую производную Гато  $\Phi''(x)$ .

**Замечание 1.4.** При фиксированном  $x$  вторая производная  $\Phi''(x)$  представляет собой билинейное отображение  $R^n \times R^n$  в  $R^n$  [88, с. 78] и его норма определяется по формуле

$$\|\Phi''(x)\| = \sup_{\|h\|=1} \sup_{\|g\|=1} \|\Phi''(x)hg\|,$$

где

$$\Phi''(x)hg = (g^T H_1(x)h, \dots, g^T H_n(x)h)^T,$$

$H_1(x), \dots, H_n(x)$  — матрицы Гессе компонент  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  в точке  $x$ . Производная  $\Phi''(x)$  называется ограниченной, если для любой ограниченной области  $D \subseteq \text{dom } \Phi$

$$\sup_{x \in D} \|\Phi''(x)\| < \infty.$$

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что последовательность  $\{x^k\}$  определена итерационными формулами (1.6) корректно, причем

$$x^k \in X_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Действительно, производная  $\Phi'(x^k)$  существует — это вытекает из непрерывной дифференцируемости операторов  $f, g$  краевой задачи, существование обратной матрицы  $(\Phi'(x^k))^{-1}$  обеспечивается условием 3. Покажем, что множество

$$P_k^* = \arg \min_{\eta \in P_k} \|\Phi(x^k - \eta z^k)\|$$

не пусто и ограничено, откуда будет следовать корректность определения «длины шага»  $\eta_k$  в (1.6). Согласно условию 1 множество  $X_0$  компактно, следовательно, компактным является также множество

$$P_{k,0} = \{\eta \geq 0 : x^k - \eta z^k \in X_0\} \subset P_k.$$



Функция  $\varphi_k(\eta) = \|\Phi(x^k - \eta z^k)\|$  определена и непрерывна на  $P_{k,0}$ . По теореме Вейерштрасса [70, с. 295] она достигает на  $P_{k,0}$  своей точной нижней грани, т. е. множество

$$P_{k,0}^* = \arg \min_{\eta \in P_{k,0}} \|\Phi(x^k - \eta z^k)\|$$

является непустым; кроме того, оно ограничено, так как является подмножеством компакта  $P_{k,0}$ . Остается заметить, что  $P_{k,0}^* = P_k^*$ .

Обозначим через  $X_0(\delta)$  так называемое  $\delta$ -расширение множества  $X_0$ :

$$X_0(\delta) = \{x \in R^n : \exists \bar{x} \in X_0 : \|x - \bar{x}\| \leq \delta\}, \quad \delta > 0.$$

При достаточно малом  $\delta > 0$  множество

$$X_0(\delta) \subseteq \text{dom } \Phi.$$

Это нетрудно установить, если учесть, что множество  $X_0(\delta)$  компактно (так как является  $\delta$ -расширением компактного множества  $X_0$ ), а множество

$$\text{dom } \Phi = \{x \in R^n : (1, x) \in \text{dom } U\}$$

открыто. Открытость  $\text{dom } \Phi$  доказывается с помощью следующей леммы.

**Лемма Гронуолла [115].** Пусть  $\bar{x} \in \text{dom } \Phi$ , тогда

$$\|U(t, x) - U(t, \bar{x})\| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

если

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\| &\leq \exp(-L), \\ L &= \sup_{t \in [0,1]} \sup_{\|u - U(t, \bar{x})\| \leq 1} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\|, \end{aligned}$$

значит, шар  $\{x \in R^n : \|x - \bar{x}\| \leq \exp(-L)\} \subseteq \text{dom } \Phi$ .

Для произвольного шага  $k$  итерационной процедуры рассмотрим вектор

$$x^{k+1}(\eta) = x^k - \eta z^k$$

в зависимости от  $\eta \geq 0$ . Заметим, что  $x^{k+1}(0) = x^k$ ,  $x^{k+1}(\eta_k) = x^{k+1}$ . Поскольку  $x_k \in X_0$ , по условию 3

$$\|(\Phi^{k*}(x^k))^{-1}\| \leq N.$$

Ввиду этого

$$\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| = \eta \|z^k\| \leq \eta \|(\Phi^{k*}(x^k))^{-1}\| \|\Phi^k(x^k)\| \leq \eta N \|\Phi^k(x^k)\|. \quad (1.7)$$

Введем обозначение (считая  $\Phi(x^0) \neq 0$ )

$$R = \|\Phi(x^0)\|$$

и выберем  $\eta$  из отрезка  $0 \leq \eta \leq \frac{\delta}{NR}$ , тогда из (1.7) получим

$$\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| \leq \eta N \|\Phi(x^k)\| \leq \eta NR \leq \delta.$$

Следовательно,  $x^{k+1}(\eta) \in X_0(\delta)$ , но выше показано включение  $X(\delta) \subseteq \text{dom } \Phi$ , поэтому оператор  $\Phi$  в точке  $x^{k+1}(\eta)$  определен. Ясно также, что

$$\lambda x^k + (1 - \lambda) x^{k+1}(\eta) \in X_0(\delta) \subseteq \text{dom } \Phi, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

из условия 4

$$\sup_{\lambda \in [0, 1]} \|\Phi'(\lambda x^k + (1 - \lambda) x^{k+1}(\eta))\| \leq M \equiv \sup_{X_0(\delta)} \|\Phi'(x)\| < \infty. \quad (1.8)$$

Оценим  $\|\Phi(x^{k+1}(\eta))\|$  сверху. Используя неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi(x^{k+1}(\eta))\| &\leq \|1 - \eta\| \|\Phi(x^k)\| + \|\Phi(x^{k+1}(\eta)) - \\ &\quad - \Phi(x^k) - \Phi'(x^k)(x^{k+1}(\eta) - x^k)\|. \end{aligned}$$

Второе слагаемое здесь оценим с помощью теоремы 3.3.6 о среднем значении приведенной в [88], а затем используем соотношения (1.8), (1.7) и  $\|\Phi(x^k)\| \leq R$ . Получается следующее:

$$\begin{aligned} \|\Phi(x^{k+1}(\eta))\| &\leq \|1 - \eta\| \|\Phi(x^k)\| + \sup_{\lambda \in [0, 1]} \|\Phi'(\lambda x^k + (1 - \lambda) x^{k+1}(\eta))\| \\ &\quad \|x^{k+1}(\eta) - x^k\|^2 \leq \|1 - \eta\| \|\Phi(x^k)\| + MN^2 \eta^2 \|\Phi(x^k)\|^2 \leq \\ &\leq (\|1 - \eta\| + MN^2 R \eta^2) \|\Phi(x^k)\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\Phi(x^{k+1}(\eta))\| \leq (\|1 - \eta\| + MN^2 R \eta^2) \|\Phi(x^k)\|.$$

Подставив сюда

$$\eta = \bar{\eta} = \min \left\{ 1; \frac{\delta}{NR}; \frac{1}{2MN^2 R} \right\},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Phi(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| &\leq d \|\Phi(x^k)\|, \\ d = 1 - \bar{\eta} + MN^2 R \bar{\eta}^2 &< 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

С помощью этой оценки докажем принадлежность  $x^{k+1}(\bar{\eta}) \in X_0$ . Допустим обратное, тогда

$$x^{k+1}(\bar{\eta}) \in (\text{dom } \Phi) \setminus X_0,$$

и при этом

$$x^k \in X_0, \quad \|x^k - x^{k+1}(\bar{\eta})\| \leq \delta.$$

Применим условие 2 при  $x = x^k$ ,  $y = x^{k+1}(\bar{\eta})$ , считая выбранное выше число  $\delta \leq \Delta$ . Имеем соотношение

$$\|\Phi(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| \geq \|\Phi(x^k)\|.$$

Сопоставляя его с (1.9), приходим к выводу, что  $\Phi(x^k) = 0$ , но тогда  $x^{k+1}(\bar{\eta}) = x^k \in X_0$ . Полученное противоречие доказывает, что

$$x^{k+1}(\bar{\eta}) \in X_0. \quad (1.10)$$

Обратим теперь внимание на формулы (1.6) для определения  $x^{k+1}$ . Учитывая (1.10), легко заключить, что

$$\|\Phi(x^{k+1})\| = \|\Phi(x^{k+1}(\eta_k))\| \leq \|\Phi(x^{k+1}(\bar{\eta}))\|.$$

Для правой части этого неравенства существует оценка (1.9), поэтому

$$\|\Phi(x^{k+1})\| \leq d \|\Phi(x^k)\|, \quad d < 1.$$

Следовательно,

$$\|\Phi(x^{k+1})\| \leq d^{k+1} \|\Phi(x^0)\|, \quad k = 0, 1, \dots$$

Так как  $d < 1$ , это значит, что  $\Phi(x^k) \rightarrow 0$ , при  $k \rightarrow \infty$ .

Таким образом, доказано, что для последовательности траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  выполняется сходимость

$$g(u^k(0), u^k(1)) = \Phi(x^k) \rightarrow 0,$$

причем каждая траектория  $u^k(t)$  удовлетворяет условиям (1.3) (иначе,  $x^k \in X$ ). Чтобы отсюда получить утверждение, нужно воспользоваться сделанным в начале этого параграфа предположением об устойчивости решения  $u^*(t)$  краевой задачи.

Как показывает теорема 1.1, для реализации метода стрельбы вида (1.6) стартовый вектор  $x^0$  должен быть взят из множества  $X$ , т. е. так, чтобы  $(1, x^0) \in \text{dom } U$  и  $U(t, x^0) \in G(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Возникает вопрос о том, насколько трудно практически осуществить выбор  $x^0$  из  $X$ ?

Различают две возможные ситуации. Решение задачи Коши слабо реагирует на изменения начальных данных, и тогда множество допустимых стартовых векторов представляет собой «широкое» множество, т. е. включающее шар достаточно большого диаметра. В этой ситуации выбор  $x^0$  осуществляется на практике без особых затруднений путем простого подбора. Иначе обстоит дело в случае, когда траектории дифференциальной системы сильно чувствительны к изменению начальных условий и могут «быстро расти». Множество  $X$  оказывается тогда очень «узким», т. е. может включать только очень малые шары, и для отыскания хотя бы одного его элемента не обойтись без специальных численных методов. Эти факты общеизвестны, они рассмотрены, в частности, в работах [30, 46, 104, 114, 124, 149].

Из сказанного следует, что необходимы такие модификации метода стрельбы, которые работали бы при любом начальном приближении  $x^0 \in G(0)$ , не требуя при этом разрешимости задач Коши обязательно на всем отрезке  $[0, 1]$ . Основным подходом к разработке таких методов в настоящее время является метод продолжения по параметру [85, 96, 104, 105, 129, 130, 143, 148, 149]. Используется, в частности, метод, в котором в качестве параметра продолжения берется длина отрезка интегрирования: отрезок  $[0, 1]$  разбивается точками  $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = 1$  и решение задачи сводится к последовательному решению некоторых промежуточных подзадач на подотрезках  $[0, \tau_m]$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Таким образом, на  $m$ -м шаге стрельба ведется траекториями, прерванными в момент  $\tau_m$ . Недостаток этого алгоритма состоит в том, что моменты прерыва-

ния  $\tau_m$  здесь фиксируются до вычисления самих траекторий. При «нерегулярном» поведении последних и неоднозначной разрешимости краевой задачи очень трудно заранее предсказать оптимальное расположение точек  $\tau_m$ . Поэтому для обеспечения надежной работы алгоритма приходится брать число  $M$  этих точек больше, чем необходимо в действительности, а это сказывается на объеме вычислительных затрат. Предлагаемый ниже алгоритм отличается от указанного тем, что момент прерывания каждой пристрелочной траектории определяется автоматически в ходе ее вычисления.

Введем в рассмотрение функцию прерывания

$$\tau(x) = \begin{cases} \sup \{t \in [0, 1] : (t, x) \in \text{dom } U, \\ U(t', x) \in G(t'), 0 \leq t' \leq t, \text{ если } x \in G(0), \\ 0, \text{ если } x \in R^n \setminus G(0). \end{cases}$$

В процессе стрельбы всякую пристрелочную траекторию  $u(t) = U(t, x)$  будем вычислять только на отрезке  $[0, \tau(x)]$ , т. е. прерывая ее в момент  $t = \tau(x)$ . Из определения функции  $\tau(x)$  видно, что  $\tau(x) = 1$ , если траектория  $u(t) = U(t, x)$  удовлетворяет дополнительным условиям (1.3) краевой задачи, в противном случае  $\tau(x)$  есть момент выхода  $u(t)$  из  $G(t)$ .

С точки зрения реальных вычислений необходимо, чтобы на отрезке  $[0, \tau(x)]$  траектория  $U(t, x)$  была ограниченной. Пусть выполняется условие:

$$\forall x \in R^n, \text{ если } \exists t_\infty \in (0, 1] \lim_{t \rightarrow t_\infty} \|U(t, x)\| = \infty, \text{ то}$$

$$\exists \hat{t} \in [0, t_\infty) \quad U(\hat{t}, x) \notin G(\hat{t}). \quad (1.11)$$

Тогда любая траектория  $U(t, x)$ , неограниченно возрастающая при  $t \rightarrow t_\infty \leq 1$ , непременно в какой-то момент  $\hat{t} < t_\infty$  должна оказаться вне «трубки»  $G(t)$ , а значит,  $\tau(x) < t_\infty$ , или, что то же,

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau(x)} \|U(t, x)\| < \infty.$$

Указанному условию легко удовлетворить при задании множеств  $G(t)$ . Действительно, в качестве  $\{G(t)\}$  всегда можно взять равномерно ограниченное семейство множеств, т. е. такое, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|x\| : x \in G(t) < \infty,$$

а в этом случае свойство (1.11) справедливо.

Пусть, кроме того, семейство  $\{G(t)\}$  удовлетворяет следующему условию: если непрерывная вектор-функция  $u(t) \in G(t)$  для всех  $t \in [0, 1)$ , то  $u(1) \in G(1)$ . Будем иметь равенство

$$\{x : \tau(x) = 1\} = X = \{x : U(t, x) \in G(t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Видим, что отыскание траектории, удовлетворяющей условиям (1.3), можно свести к решению уравнения

$$\tau(x) = 1.$$

Ввиду этого пристрелочную процедуру организуем следующим образом.

Стрельбу начинаем с произвольного вектора  $x^0 \in G(0)$ . В общем случае  $\tau(x^0) < 1$ . Тогда строим последовательность  $x^0, x^1, \dots$ , максимизирующую функцию  $\tau(x)$ , получаем

$$\tau(x^0) < \tau(x^1) < \dots < \tau(x^l) = 1.$$

Затем, начиная с вектора  $x^l$  (в случае  $\tau(x^0) = 1$  полагаем  $x^l = x^0$ ), строим процесс  $x^l, x^{l+1}, \dots$  минимизации невязки  $\|\Phi(x)\|$  (для системы стыковки (1.4)) с соблюдением равенства  $\tau(x) = 1$ :

$$\|\Phi(x^k)\| \geq \|\Phi(x^{k+1})\|, \quad \tau(x^{k+1}) = 1; \quad k = l, l+1, \dots$$

При наличии сходимости  $\|\Phi(x_k)\| \rightarrow 0$  последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  будет равномерно сходиться к решению  $u^*(t)$  задачи (1.1) — (1.3).

Таким образом, поиск решения краевой задачи проводится в два этапа. На первом этапе путем решения экстремальной задачи

$$1 - \tau(x) \rightarrow \min_{x \in R^n} \quad (1.12)$$

находят вектор  $x^l \in X$  и соответствующую ему траекторию  $u^l(t) = U(t, x^l)$ , для которой выполнено (1.3). При этом можно использовать известные общие методы минимизации функционалов, изложенные, в частности, в работе [35]. Однако такой подход может оказаться недостаточно эффективным, поскольку не учитывает специфики минимизируемого функционала  $1 - \tau(x)$ , его природы. В следующих параграфах для решения экстремальной задачи (1.12) предлагаются итерационные процедуры, построенные на основе итерационных схем решения нелинейных систем уравнений.

Второй этап стрельбы представляет, по существу, обычный метод стрельбы и может быть реализован, например, с помощью следующего варианта метода Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - \eta_k z^k, \quad z^k = (\Phi'(x^k))^{-1} \Phi(x^k), \\ \eta_k \in \operatorname{argmin}_{\eta \in P_k} \|\Phi(x^k - \eta z^k)\|, \quad (1.13)$$

$$P_k = \{\eta \geq 0 : \tau(x^k - \eta z^k) = 1\}, \quad k = l, l+1, \dots$$

Поскольку  $\{x : \tau(x) = 1\} = X$  и  $x^l \in X$ , для обоснования итерационного процесса (1.13) можно обратиться к теореме 1.1, заменив в ее формулировке вектор  $x^0$  на  $x^l$ , а множество  $X_0$  на

$$X_l = \{x \in X : \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x^l)\|\}.$$

*Замечание 1.5.* В так называемом двустороннем варианте метода стрельбы [87, 104, 138] точка выстрела  $s$  берется внутри отрезка интегрирования  $[0, 1]$ , а стрельба ведется одновременно на участке  $[s, 1]$  (решается прямая задача Коши) и на участке  $[0, s]$  (решается обратная задача Коши). Система стыковки имеет вид

$$\Phi(x) \equiv g(U(0, s, x), U(1, s, x)) = 0, \quad (1.14)$$

где  $U(t, s, x)$  — решение задачи Коши  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(s) = x$  в точке  $t \in [0, 1]$ . Описанный выше модифицированный метод стрельбы обобщается естественным образом, а именно, интегрирование дифференциальной системы с начальным условием  $u(s) = x$  проводится теперь на участках  $[s, \tau^+(s, x)]$  и  $[\tau^-(s, x), s]$ , где

$$\tau^-(s, x) = \inf \{t \in [0, s] : U(t', s, x) \in G(t'), t \leq t' \leq s\},$$

$$\tau^+(s, x) = \sup \{t \in [s, 1] : U(t', s, x) \in G(t'), s \leq t' \leq t\}.$$

На первом этапе стрельбы максимизируется разность  $\tau^+(s, x) - \tau^-(s, x)$ ,  $x \in G(s)$ . В результате определяется траектория  $u^0(t) = U(t, s, x')$ , не выходящая из  $G(t)$  при всех значениях  $t \in [0, 1]$ . На заключительном этапе минимизируется невязка  $\|\Phi(x)\|$  для системы (1.14) без нарушения равенства  $\tau^+(s, x) - \tau^-(s, x) = 1$ , причем в качестве стартового вектора берется  $x'$ .

**Решение задач с неразделенными краевыми условиями общего вида.** Будем решать краевую задачу

$$\dot{u} = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.15)$$

$$g(u(0), u(1)) = 0, \quad (1.16)$$

$$u(t) \in S(c, r), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.17)$$

где  $f: [0, 1] \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $g: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  — непрерывно-дифференцируемые нелинейные операторы,  $S(c, r) = \{x \in R^n : \|x - c\| \leq r\}$  — замкнутый шар радиуса  $r \in (0, +\infty)$  с центром  $c \in R^n$ .

Применим метод стрельбы с прерыванием пристрелочных траекторий при их выходе из шара  $S(c, r)$ . Траекторию системы  $\dot{u} = f(t, u)$  с начальным условием  $u(0) = x$  будем, как и ранее, обозначать через  $U(t, x)$ . Определим функцию прерывания траекторий:

$$\tau(x) = \begin{cases} \sup \{t \in [0, 1] : U(t', x) \in S(c, r), 0 \leq t' \leq t\}, & x \in S(c, r); \\ 0, & x \in R^n \setminus S(c, r). \end{cases}$$

Отсюда видно, что любая траектория  $u(t) = U(t, x)$  с начальным вектором  $x \in S(c, r)$  на отрезке  $[0, \tau(x)]$  находится в шаре  $S(c, r)$ , причем если  $\tau(x) < 1$ , то в момент  $t = \tau(x)$  она оказывается на границе этого шара, а затем — вне его. Отметим еще одно свойство функции  $\tau(x)$ .

**Лемма 1.1.** *Функция  $\tau(x)$  полунепрерывна сверху, т. е.  $\forall \bar{x} \in R^n \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in R^n$ , неравенство  $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$  влечет за собой условие  $\tau(\bar{x}) \geq \tau(x) - \varepsilon$ .*

**Доказательство.** Допустим обратное: пусть

$$\exists \bar{x} \in R^n \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in S(\bar{x}, \delta) \equiv \{x : \|\bar{x} - x\| \leq \delta\},$$

$$\tau(\bar{x}) < \tau(x) - \varepsilon.$$

Тогда  $\tau(\bar{x}) < 1$  и, следовательно,

$$\exists s \in (\tau(\bar{x}), \tau(\bar{x}) + \varepsilon) \quad \varepsilon_0 \equiv \|U(s, x) - c\| - r > 0. \quad (1.18)$$

Вследствие непрерывности оператора  $U(s, \cdot)$  в  $\bar{x}$  для указанного  $\varepsilon_0 > 0$

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \forall x \in S(\bar{x}, \delta_0) \quad \|U(s, \bar{x}) - U(s, x)\| < \varepsilon_0. \quad (1.19)$$

Из (1.18), (1.19) следует, что для любого  $x \in S(\bar{x}, \delta_0)$

$$\|U(s, x) - c\| > r.$$

Последнее неравенство означает, что  $\tau(x) < s$  и тем более  $\tau(x) < \tau(x) + \varepsilon$ . Таким образом,

$$\forall x \in S(\bar{x}, \delta_0) \quad \tau(\bar{x}) > \tau(x) - \varepsilon,$$

но это противоречит допущению. Лемма доказана.

Рассмотрим итерационный процесс стрельбы:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \eta_k z^k, \quad z^k = A^k \Phi^k(x^k), \\ \eta_k &\in \begin{cases} \operatorname{argmax}_{\eta \geq 0} \tau(x^k - \eta z^k), & \tau(x^k) < 1, \\ \operatorname{argmin}_{\eta \in P_k} \|\Phi(x^k - \eta z^k)\|, & \tau(x^k) = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$P_k = \{\eta \geq 0 : \tau(x^k - \eta z^k) = 1\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad x^0 \in S(c, r).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi^k(x) &= \begin{cases} U(\tau(x^k), x) - c, & \text{если } \tau(x^k) < 1, \\ \Phi(x), & \text{если } \tau(x^k) = 1, \end{cases} \\ \Phi(x) &= g(x, U(1, x)). \end{aligned}$$

Матрица  $A^k$  размера  $n \times n$  определяется в схеме (1.20) так, чтобы  $k$ -я итерация соответствовала какому-нибудь подходящему методу решения нелинейных систем уравнений применительно к системе  $\Phi^k(x) = 0$ . Например, выбор

$$A^k = E \quad (1.21)$$

( $E$  — единичная матрица) соответствует явному методу простой итерации; при

$$A^k = (\Phi^{k'}(x^k))^T \quad (1.22)$$

используется градиентный метод; при

$$A^k = (\Phi^{k'}(x^k))^{-1} \quad (1.23)$$

применяется модифицированный метод Ньютона.

Формулы (1.20) для определения  $x^{k+1}$  через  $x^k$  зависят от того, принадлежит  $x^k$  множеству

$$X = \{x : \tau(x) = 1\}$$

или нет.

При  $\tau(x^k) < 1$  (начальная стадия процесса) вектор  $x^{k+1}$  строится для получения  $\tau(x^{k+1}) > \tau(x^k)$ . При этом направление движения  $h = -z^k$  от точки  $x^k$  выбирается с таким расчетом, чтобы траектория  $U(t, x^k - \eta z^k)$  при достаточно малом шаге  $\eta > 0$  в момент  $t = \tau(x^k)$  оказывалась внутри шара  $S(c, r)$  (т. е.  $\|\Phi^k(x^k - \eta z^k)\| =$

$= \|U(\tau(x^k), x^k - \eta z^k) - c\| < r)$ , в отличие от траектории  $U(t, x^k)$ , которая в этот момент находится на границе шара ( $\|\Phi^k(x^k)\| = \|U(\tau(x^k), x^k) - c\| = r$ ). Шаг  $\eta_k$  определяется в результате максимизации функции  $\tau(x^k - \eta z^k)$  по  $\eta \geq 0$ . Покажем корректность такого определения, т. е. то, что множество

$$T_k = \arg \max_{\eta \geq 0} \tau(x^k - \eta z^k)$$

не пустое. Если  $z^k = 0$  или

$$\sup_{\eta \geq 0} \tau(x^k - \eta z^k) = 0,$$

то  $T_k = [0, +\infty)$ . Если же  $z^k \neq 0$  и

$$\sup_{\eta \geq 0} \tau(x^k - \eta z^k) > 0,$$

то  $T_k$  совпадает с множеством

$$\hat{T}_k = \operatorname{argmax}_{\eta \in [0, \hat{\eta}_k]} \tau(x^k - \eta z^k), \quad \hat{\eta}_k = \frac{2r}{\|z^k\|},$$

так как при  $\eta > \hat{\eta}_k$  точка  $x^k - \eta z^k \notin S(c, r)$  и  $\tau(x^k - \eta z^k) = 0$ . Но множество  $\hat{T}_k$  пустым быть не может. Действительно, в силу леммы 1.1 функция  $\Theta(\eta) = \tau(x^k - \eta z^k)$  полунепрерывна сверху, а следовательно, по известному обобщению теоремы Вейерштрасса [111, с. 475] на отрезке  $[0, \hat{\eta}_k]$  она достигает своей точной верхней грани.

Как только процесс  $\{x^k\}$  попадает в множество  $X$ , процедура стрельбы переключается на минимизацию невязки  $\|\Phi(x)\|$  с сохранением равенства  $\tau(x) = 1$ . Направляющий вектор  $h = -z^k$  берется так, чтобы

$$\|\Phi(x^k - \eta z^k)\| < \|\Phi(x^k)\|,$$

если  $\eta > 0$  достаточно мало и  $\|\Phi(x^k)\| \neq 0$ . Шаг  $\eta_k$  определяется как решение экстремальной задачи

$$\|\Phi(x^k - \eta z^k)\| \rightarrow \min_{\eta \in P_k}.$$

В разрешимости этой задачи нетрудно убедиться, если принять во внимание непрерывность функции  $\varphi(\eta) = \|\Phi(x^k - \eta z^k)\|$  и тот факт, что множество  $P_k = \{\eta \geq 0 : x^k - \eta z^k \in X\}$  замкнуто и ограничено. Последнее вытекает из очевидного включения  $X \subseteq S(c, r)$ , замкнутость — из замкнутости множества  $X$ . В свою очередь условие замкнутости  $X$  — следствие полунепрерывности сверху функции  $\tau(x)$ .

Таким образом, пристрелочная процедура (1.20) в идеальном варианте должна производиться следующим образом: в начальной стадии

$$\tau(x^0) < \tau(x^1) < \dots < \tau(x^l) = 1,$$

а в заключительной —

$$\begin{aligned} \tau(x^k) &= 1, \quad k \geq l, \\ \|\Phi(x^k)\| &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{1.24}$$



Возникает вопрос, будет ли тогда последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  сходиться к решению краевой задачи? Ответ дает следующая лемма.

**Лемма 1.2.** Пусть выполняется (1.24). Тогда краевая задача (1.15) — (1.17) имеет решение. Если оно единственно, то последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  при  $k \rightarrow \infty$  равномерно к нему сходится.

**Доказательство.** Так как  $\tau(x^k) = 1$ ,  $k \geq l$ , то  $u^k(t) \in S(c, r)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $k \geq l$ . Следовательно,

$$\|u^k(t)\| \leq \|c\| + r,$$

$$\|\dot{u}^k(t)\| \leq \sup\{\|f(s, u)\| : s \in [0, 1], u \in S(c, r)\} < \infty$$

для любых  $t \in [0, 1]$ ,  $k = l, l+1, \dots$ , т. е. последовательности  $\{u^k(t)\}$  и  $\{\dot{u}^k(t)\}$  равномерно ограничены. По обобщенной теореме Арцела [64, с. 114] последовательность вектор-функций  $u^k(t)$  в таком случае будет предкомпактной в пространстве  $C([0, 1], R^n)$ . Возьмем произвольную сходящуюся подпоследовательность  $\{u^{k_i}(t)\}$ . Ее предел обозначим через  $u^*(t)$ . Докажем, что  $u^*(t)$  является решением краевой задачи.

Вследствие непрерывности оператора  $g$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(u^{k_i}(0), u^{k_i}(1)) = g(u^*(0), u^*(1)).$$

В то же время из (1.24) вытекает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(u^{k_i}(0), u^{k_i}(1)) = 0.$$

Получается, что  $g(u^*(0), u^*(1)) = 0$ , т. е.  $u^*(t)$  удовлетворяет граничным условиям (1.16).

Вектор-функция  $u^*(t)$  удовлетворяет также условию (1.17) принадлежности шару  $S(c, r)$ . Действительно, так как

$$u^{k_i}(t) \in S(c, r),$$

а шар  $S(c, r)$  представляет собой замкнутое множество, то

$$u^*(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} u^{k_i}(t) \in S(c, r).$$

Остается проверить, что  $u^*(t)$  есть решение дифференциальной системы (1.15). Замечаем, что задача Коши  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(0) = u^*(0)$  разрешима на отрезке  $[0, 1]$ , ибо обратное допущение привело бы к равенству

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, 1]} \|u^{k_i}(t)\| = \infty,$$

которое невозможно. По неравенству треугольника для всех  $t \in [0, 1]$

$$\|u^*(t) - U(t, u^*(0))\| \leq \|u^*(t) - u^{k_i}(t)\| + \|U(t, u^{k_i}(0)) - U(t, u^*(0))\|.$$

Правая часть этого соотношения может быть сколь угодно малой при достаточно большом номере  $i$ , значит,

$$u^*(t) = U(t, u^*(0)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

т. е.  $u^*(t)$  удовлетворяет (1.15).

Таким образом, последовательность  $\{u^k(t)\}$  предкомпактна, и всякая сходящаяся ее подпоследовательность  $\{u^{k_i}(t)\}$  в качестве своего предела может иметь только решение  $u^*(t)$  краевой задачи (единственное, из предположения леммы 1.2). Следовательно, последовательность  $\{u^k(t)\}$  равномерно сходится к  $u^*(t)$  при  $k \rightarrow \infty$ , что и требовалось доказать.

Приступим теперь к обоснованию конкретных вариантов итерационной схемы (1.20). Вначале рассмотрим случай, когда матрица в (1.20) задается по формуле (1.23), т. е. как в методе Ньютона.

**Теорема 1.2.** Пусть выполнены следующие условия:

1)  $\exists \Delta > 0, \forall x \in S(c, r)$ , если  $\exists t_1 \in (\tau(x), 1], U(t_1, x) \in S(c, r)$ , то  $\exists t_0 \in (\tau(x), t_1), U(t_0, x) \in R^n \setminus S(c, r + \Delta)$ ;

2) если  $x \in X, y \in \text{dom}, \Phi \setminus X$  и  $\|x - y\| \leq \Delta$ , то  $\|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(y)\|$ ;

3)  $\det \left( \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \right) \neq 0$  на множестве  $\{(t, x) \in [0, 1] \times R^n : t = \tau(x)\}$  и  $\det(\Phi'(x)) \neq 0$  на  $X$ , причем  $\exists N < \infty \sup_{t=\tau(x)} \left\| \left( \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} \right\| \leq N$ ,

$$\sup_X \|\Phi'(x)\|^{-1} \leq N;$$

4) существуют ограниченные вторые производные Гато  $\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2}$  и  $\Phi''(x)$ ;

5)  $\exists x^0 \in R^n$

$$\|x^0 - c\| < r, \quad \tau(x^0) \geq \max_{\|x-c\|=r} \tau(x). \quad (1.25)$$

Тогда краевая задача (1.15) — (1.17) разрешима, и если ее решение  $u^*(t)$  единственно, то итерационной последовательности  $\{x^k\}$ , определяемой по формулам (1.20), (1.23), (1.25), соответствует последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  такая, что  $\exists l < \infty u^k(t) \in S(c, r), 0 \leq t \leq 1, k = l, l+1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, 1]} \|u^k(t) - u^*(t)\| = 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный  $k$ -й шаг итерационной процедуры (1.20), (1.23)

$$x^{k+1} = x^k - \eta_k z^k, \quad z^k = (\Phi^{k'}(x^k))^{-1} \Phi^k(x^k),$$

считая, что  $\|x^k - c\| < r, \tau(x^k) \geq \tau(x^0)$ . Исследуем зависимость  $x^{k+1}(\eta) = x^k - \eta z^k$  от  $\eta \geq 0$ . Используя условие 3, имеем

$$\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| = \eta \|z^k\| \leq \eta \|(\Phi^{k'}(x^k))^{-1}\| \|\Phi^k(x^k)\| \leq \eta N \|\Phi^k(x^k)\|. \quad (1.26)$$

Пусть  $\eta$  взято из промежутка  $0 \leq \eta \leq \frac{\delta}{NR}$ , где  $\delta = \Delta \exp(-L)$ ,

$$L = \sup_{[0, 1] \times S(c, r + \Delta)} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\|, \quad R = \max \{r, \sup_X \|\Phi(x)\|\}.$$

Тогда с помощью очевидной оценки

$$\|\Phi^k(x^k)\| \leq R$$

из (1.26) получаем, что  $\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| \leq \eta NR \leq \delta$ . По неравенству Гронуолла [115] при  $0 \leq t \leq \tau(x^k)$

$$\|U(t, x^{k+1}(\eta)) - U(t, x^k)\| \leq \|x^{k+1}(\eta) - x^k\| \exp L \leq \delta \exp L = \Delta.$$

Следовательно,  $x^{k+1}(\eta) \in \text{dom } \Phi^k$  и

$$U(t, x^{k+1}(\eta)) \in S(c, r + \Delta), \quad \forall t \in [0, \tau(x^k)]. \quad (1.27)$$

Оценим  $\|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|$ . Для этого используем неравенство треугольника, затем применим теорему 3.3.6 из [88] о среднем значении. Учитывая условие 4 и неравенство (1.26), будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\| &\leq |1 - \eta| \|\Phi^k(x^k)\| + \|\Phi^k(x^{k+1}(\eta)) - \\ &- \Phi^k(x^k) - \Phi^{k'}(x^k)(x^{k+1}(\eta) - x^k)\| \leq |1 - \eta| \|\Phi^k(x^k)\| + \\ &+ \sup_{\lambda \in [0, 1]} \|\Phi^{k''}(\lambda x^k + (1 - \lambda)x^{k+1}(\eta))\| \|x^{k+1}(\eta) - x^k\|^2 \leq \\ &\leq (|1 - \eta| + MN^2 R \eta^2) \|\Phi^k(x^k)\|, \end{aligned}$$

где  $M < \infty$  такое, что

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \left\| \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} \right\| : (t, x) \in ([0, 1] \times S(c, r + \Delta)) \cap \text{dom } U \right\} &\leq M, \\ \sup \{ \|\Phi''(x)\| : x \in S(c, r + \Delta) \cap \text{dom } \Phi \} &\leq M. \end{aligned}$$

Возьмем  $\eta = \bar{\eta} = \min \left\{ 1; \frac{\delta}{NR}; \frac{1}{2MN^2R} \right\}$ , получим оценку

$$\begin{aligned} \|\Phi^k(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| &\leq d \|\Phi^k(x^k)\|, \\ d = 1 - \bar{\eta} + MN^2 R \bar{\eta}^2 &< 1. \end{aligned} \quad (1.28)$$

В случае  $\tau(x^k) < 1$  оценка (1.28) представляется в виде

$$\|U(\tau(x^k), x^{k+1}(\bar{\eta})) - c\| \leq dr < r. \quad (1.29)$$

Покажем, что в этом случае

$$\|x^{k+1}(\bar{\eta}) - c\| < r, \quad \tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) > \tau(x^k).$$

Заметим сразу, что в силу (1.29) и  $\tau(x^k) < 1$ , равенство  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) = \tau(x^k)$  невозможно. Допустим, что  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) < \tau(x^k)$  и  $\|x^{k+1}(\bar{\eta}) - c\| \leq r$ , тогда, используя условие 1 при  $x = x^{k+1}(\bar{\eta})$  и  $t_1 = \tau(x^k)$  и учитывая (1.29), приходим к заключению, что

$$\begin{aligned} \exists t_0 \in (\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})), \tau(x^k)), \\ U(t_0, x^{k+1}(\bar{\eta})) \notin S(c, r + \Delta), \end{aligned}$$

но это противоречит доказанному выше соотношению (1.27). Следовательно,  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) > \tau(x^k)$  и так как  $\tau(x^k) \geq \tau(x^0) \geq \max_{\|x-c\|=r} \tau(x)$

условие 5), то  $\|x^{k+1}(\bar{\eta}) - c\| < r$ . Теперь допустим, что  $\|x^{k+1}(\bar{\eta}) - c\| > r$  (в этом случае, очевидно,  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) = 0$ ).

Так как  $\|x^k - c\| < r$ , найдется число  $\hat{\eta} \in (0, \bar{\eta})$  такое, что  $\|x^{k+1} \times \hat{\eta} - c\| = r$ . Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, устанавливаем, что  $\|x^{k+1}(\hat{\eta}) - c\| < r$ , т. е. допущение неверно.

Найдем оценку для разности  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) - \tau(x^k)$ . С этой целью заметим, что

$$\|U(t', x) - U(t'', x)\| \leq K(t' - t''), \quad K = \sup_{[0,1] \times S(c,r)} \|f(t, u)\|,$$

если  $U(t, x) \in S(c, r)$ ,  $t \in [t'', t']$ . Подставив в приведенное неравенство  $t' = \tau(x^{k+1}(\bar{\eta}))$ ,  $t'' = \tau(x^k)$ ,  $x = x^{k+1}(\bar{\eta})$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) - \tau(x^k) &\geq K^{-1} \|U(\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})), x^{k+1}(\bar{\eta})) - \\ &- U(\tau(x^k), x^{k+1}(\bar{\eta}))\| \geq K^{-1} (\|U(\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})), x^{k+1}(\bar{\eta})) - c\| - \\ &- \|U(\tau(x^k), x^{k+1}(\bar{\eta})) - c\|). \end{aligned}$$

Отсюда, используя оценку (1.29), находим, что

$$\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) - \tau(x^k) \geq \min\{1 - \tau(x^k); K^{-1}r(1 - d)\},$$

а так как из определения  $\eta_k$  следует

$$\tau(x^{k+1}) = \tau(x^{k+1}(\eta_k)) \geq \tau^{k+1}(\bar{\eta}),$$

имеем

$$\tau(x^{k+1}) - \tau(x^k) \geq \min\{1 - \tau(x^k); K^{-1}r(1 - d)\}. \quad (1.30)$$

В случае  $\tau(x^k) = 1$  оценка (1.28) приобретает вид

$$\|\Phi(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| \leq d \|\Phi(x^k)\|, \quad d < 1. \quad (1.31)$$

Тогда  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) = 1$ , ибо в противном случае, применив условие 2 с  $x = x^k$ ,  $y = x^{k+1}(\bar{\eta})$ , получили бы соотношение  $\|\Phi(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| \geq \|\Phi(x^k)\|$ , противоречащее (1.31). Поэтому  $\bar{\eta} \in P_k$  и

$$\|\Phi(x^{k+1})\| = \|\Phi(x^{k+1}(\eta_k))\| \leq \|\Phi(x^{k+1}(\bar{\eta}))\|.$$

Следовательно, если  $\tau(x^k) = 1$ , то

$$\|\Phi(x^{k+1})\| \leq d \|\Phi(x^k)\|, \quad \tau(x^{k+1}) = 1. \quad d < 1. \quad (1.32)$$

Таким образом, в случае  $\tau(x^k) < 1$  установлена оценка (1.30), а при  $\tau(x^k) = 1$  — оценка (1.32). Поскольку константы  $d, K$  в этих оценках не зависят от конкретного выбора  $x^k$  из  $S(c, r)$ , можно сделать вывод о том, что последовательность  $\{x^k\}$ , определяемая процедурой (1.20), (1.23), (1.25), с некоторого номера

$$l \leq \frac{(1 - \tau(x^0))K}{r(1 - d)} < \infty$$

попадает в множество  $X = \{x : \tau(x) = 1\}$ , а затем, не выходя из множества  $X$ , минимизирует невязку  $\|\Phi(x)\|$ :

$$\|\Phi(x^k)\| \leq d^{k-l} \|\Phi(x^l)\|, \quad k = l+1, l+2, \dots, d < 1.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно использовать лемму 1.2.

*Замечание 1.6.* Условие 1 теоремы 1.2 будет выполнено, если

$$\left( \frac{\partial f(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} f(t, u) \right)^T (u - c) + \|f(t, u)\|^2 \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ r \leq \|u - c\| \leq r + \Delta, \quad u = U(t, x), \quad x \in S(c, r). \quad (1.33)$$

Действительно, допустим обратное:

$$\exists x \in S(c, r), \quad \exists t_1 \in (\tau(x), 1], \quad \forall t_0 \in [\tau(x), t_1],$$

$$U(t_0, x) \in S(c, r + \Delta), \quad U(t_1, x) \in S(c, r).$$

Тогда для функции  $\varphi(t) = \|U(t, x) - c\|$

$$\forall t \in [\tau(x), t_1], \quad \varphi(t) \leq r + \Delta,$$

$$\exists \hat{s} \in (\tau(x), t_1), \quad \varphi(\hat{s}) > r,$$

$$\varphi(\tau(x)) \leq r, \quad \varphi(t_1) \leq r.$$

На основании указанных свойств функции  $\varphi(t)$  заключаем, что

$$\exists \hat{t} \in (\tau(x), t_1), \quad r \leq \varphi(\hat{t}) \leq r + \Delta, \quad \varphi(\hat{t}) = 0, \quad \ddot{\varphi}(\hat{t}) < 0.$$

В то же время если в (1.33) подставим  $t = \hat{t}$ ,  $u = U(\hat{t}, x)$ , то получим

$$\ddot{\varphi}(\hat{t}) \varphi(\hat{t}) + (\dot{\varphi}(\hat{t}))^2 \geq 0.$$

Наблюдается противоречие.

При реализации итерационной процедуры (1.20), (1.23), обоснованной в теореме 1.2, необходимо на каждом шаге  $k$  вычислять матрицу  $A^k = (\Phi^{k'}(x^k))^{-1}$ . Для этого надо сначала вычислить матрицу Якоби  $\Phi^{k'}(x^k)$  для отображения  $\Phi^k$  в точке  $x^k$  (на что потребуется по меньшей мере  $(n+1)$  выстрелов), а затем — провести ее обращение. С увеличением размерности  $n$  затраты машинного времени на выполнение указанных операций резко возрастают. Поэтому может оказаться выгодным матрицу  $A^k$  в (1.20) задавать по «более простым формулам». Сходимость процесса тогда ухудшится, зато «стоимость» выполнения каждого итерационного шага будет сравнительно невысокой. Например, в градиентной процедуре (1.20), (1.22) нет необходимости в операции обращения матрицы. Используя известный прием, в схеме (1.20) можно принять

$$A^k = (\Phi^{p(k)'}(x^{p(k)}))^{-1}, \quad p(k) \leq k,$$

тогда вычисление якобиана и его обращение нужно будет проводить не на каждом шаге, а только на некоторых  $p(k)$ -х.

Самый простой вариант схемы (1.20) получится, если в качестве  $A^k$  взять единичную матрицу  $E$ . Сформулируем условия сходимости процесса стрельбы в этом случае.

**Теорема 1.3.** Пусть выполнены условия 1, 2, 5 теоремы 1.2 и пусть операторы  $U(t, \cdot)$ ,  $\Phi$  равномерно монотонны на некоторых множествах, т. е. при некотором  $\mu > 0$

$$(U(t, x') - U(t, x''))^T (x' - x'') \geq \mu \|x' - x''\|^2,$$

если  $t \in [0, 1]$ ,  $x', x'' \in S(c, r + \Delta)$ ,

$$\|U(s, x') - U(s, x'')\| \leq \Delta, \quad 0 \leq s \leq \tau(x'),$$

$$(\Phi(x') - \Phi(x''))^T (x' - x'') \geq \mu \|x' - x''\|^2$$

и, если  $\tau(x') = 1$ ,

$$U(s, x'') \in S(c, r + \Delta), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

тогда краевая задача (1.15) — (1.17) имеет единственное решение  $u^*(t)$ , а последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$ , определяемая итерационной процедурой (1.20), (1.21), (1.25) при  $k \rightarrow \infty$  равномерно сходится к  $u^*(t)$ .

**Доказательство.** Будем следовать схеме доказательства теоремы 1.2. Для произвольного  $k$ -го шага процесса (1.20), (1.21) рассмотрим вектор

$$x^{k+1}(\eta) = x^k - \eta z^k$$

в зависимости от  $0 < \eta < \frac{\delta}{R}$ . Здесь

$$x^k \in S(c, r), \quad z^k = \Phi^k(x^k), \quad \delta = \Delta \exp(-L), \quad L = \sup_{[0,1] \times S(c, r+\Delta)} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\|,$$

$$R = \max \{r, \sup_X \|\Phi(x)\|\}, \quad X = \{x \in R^n : \tau(x) = 1\}.$$

Очевидно, что  $\|\Phi^k(x^k)\| \leq R$ . Ввиду этого

$$\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| = \eta \|\Phi^k(x^k)\| \leq \delta = \exp(-L)$$

и, по неравенству Гронуолла, для всех  $t \in [0, \tau(x^k)]$

$$\|U(t, x^{k+1}(\eta)) - U(t, x^k)\| \leq \|x^{k+1}(\eta) - x^k\| \exp L \leq \Delta.$$

Отсюда следует, что

$$U(t, x^{k+1}(\eta)) \in S(c, r + \Delta), \quad \forall t \in [0, \tau(x^k)]. \quad (1.34)$$

Найдем оценку для  $\|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|$ . Из условия о равномерной монотонности операторов  $U(t, \cdot)$ ,  $\Phi$  следует, что

$$(\Phi^k(x^k) - \Phi^k(x^{k+1}(\eta)))^T (x^k - x^{k+1}(\eta)) \geq \mu \|x^k - x^{k+1}(\eta)\|^2.$$

Заменив здесь  $x^k - x^{k+1}(\eta)$  на  $\eta \Phi^k(x^k)$ , получим

$$(\Phi^k(x^{k+1}(\eta)))^T (\Phi^k(x^k)) \geq \mu \eta \|\Phi^k(x^k)\|^2,$$

откуда

$$\Phi^k(x^{k+1}(\eta))^T \Phi^k(x^k) \leq (1 - \mu \eta) \|\Phi^k(x^k)\|^2.$$

С помощью этого соотношения и тождества

$$\|a\|^2 = 2a^T b + \|a - b\|^2 - \|b\|^2$$

оцениваем

$$\begin{aligned}\|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|^2 &= 2\Phi^k(x^{k+1}(\eta))^T \Phi^k(x^k) + \|\Phi^k(x^k) - \Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|^2 - \\ &- \|\Phi^k(x^k)\|^2 \leq (1 - 2\mu\eta + C^2\eta^2)\|\Phi^k(x^k)\|^2,\end{aligned}$$

где  $C$  — константа Липшица для оператора  $\Phi^k$  на шаре  $S(x^k, \delta)$ ,

$$C = \max \left\{ \sup_{\{[0,1] \times S(c,r+\Delta)\} \cap \text{dom } U} \left\| \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \right\|, \sup_{S(c,r+\Delta) \cap \text{dom } \Phi} \|\Phi'(x)\| \right\}.$$

Таким образом,

$$\|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|^2 \leq (1 - 2\mu\eta + C^2\eta^2)\|\Phi^k(x^k)\|^2.$$

Подставляя сюда

$$\eta = \bar{\eta} = \min \left\{ \frac{\delta}{R}; \frac{\mu}{C^2} \right\},$$

получаем искомую оценку:

$$\|\Phi^k(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| \leq d \|\Phi^k(x^k)\|, \quad d = (1 - 2\mu\bar{\eta} + C^2\bar{\eta}^2)^{1/2} < 1. \quad (1.35)$$

Далее доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 1.2. При этом используется доказанное выше соотношение (1.34) и оценка (1.35). Заметим, что условие о равномерной монотонности оператора  $\Phi$  не позволяет краевой задаче иметь более одного решения. Действительно, пусть вектор-функции  $u^*(t)$  и  $u^{**}(t)$  удовлетворяют (1.15) — (1.17). Из условия равномерной монотонности  $\Phi$  имеем

$$(\Phi(u^*(0)) - \Phi(u^{**}(0)))^T (u^*(0) - u^{**}(0)) \geq \mu \|u^*(0) - u^{**}(0)\|^2.$$

Левая часть неравенства равна нулю (так как  $\Phi(u^*(0)) = \Phi(u^{**}(0)) = 0$ ), поэтому  $u^*(0) = u^{**}(0)$  и, следовательно,  $u^*(t) = U(t, u^*(0)) = U(t, u^{**}(0)) = u^{**}(t)$ , т. е. решения  $u^*(t)$  и  $u^{**}(t)$  краевой задачи совпадают.

*Замечание 1.7.* В алгоритме стрельбы (1.20), (1.21) производные операторов  $U$ ,  $\Phi$  не фигурируют, поэтому сделанное в начале этого параграфа предположение о непрерывной дифференцируемости операторов  $f$ ,  $g$  можно ослабить. Теорема 1.3 остается в силе, если оператор  $f$  ограниченный и почти всюду непрерывный, оператор  $f(t, \cdot)$  на любом ограниченном множестве  $D \subset R^n$  удовлетворяет условию Липшица равномерно относительно  $t \in [0, 1]$ , а оператор  $g$  на любом ограниченном множестве  $D \subset R^n \times R^n$  удовлетворяет условию Липшица.

*Замечание 1.8.* Изложенный в данном параграфе подход к построению итерационных пристрелочных процедур без существенных изменений распространяется на задачи вида

$$\begin{aligned}u &= f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ g(u(0), u(1)) &= 0, \\ u(t) &\in S(c(t), r(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,\end{aligned}$$

где  $S(c(t), r(t)) = \{x \in R^n : \|x - c(t)\| \leq r(t)\}$ , функции  $C: [0, 1] \rightarrow R^n$ ,  $r: [0, 1] \rightarrow R^1$  непрерывно дифференцируемы.

**Решение задач с краевыми условиями простейшего вида.** Метод стрельбы с прерыванием траекторий применяется для решения краевой задачи

$$\dot{u} = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.36)$$

$$u_\alpha(0) = a, \quad u_\beta(1) = b, \quad (1.37)$$

$$u_\beta(t) \in S(b, r), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.38)$$

Здесь заданы нелинейный оператор  $f: [0, 1] \times R^n \rightarrow R^n$ , мультииндексы  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-m})$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  ( $1 \leq m < n$ ), векторы  $a \in R^{n-m}$ ,  $b \in R^m$  и шар  $S(b, r) = \{x \in R^m : \|x - b\| \leq r\}$  радиуса  $r \in (0; +\infty)$ . Будем предполагать, что оператор  $f$  непрерывно дифференцируем, причем

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial f_{\beta\perp}(t, u)}{\partial u_{\beta\perp}} \right\| : t \in [0, 1], u_\beta \in S(b, r) \right\} < \infty. \quad (1.39)$$

Через  $U(t, x)$ ,  $x \in R^m$ , будем теперь обозначать решение  $u(t)$  следующей задачи Коши:

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u_\alpha(0) = a, \quad u_{\alpha\perp}(0) = x.$$

Иначе говоря,  $U(t, x)$  — это траектория дифференциальной системы (1.36) с начальным вектором  $U(0, x) = a \overset{\alpha}{\oplus} x$ . Определим функцию прерывания такого вида траекторий:

$$\tau(x) = \begin{cases} \sup \{t \in [0, 1] : U_\beta(t', x) \in S(b, r), 0 \leq t' \leq t\}, & \text{если } (a \overset{\alpha}{\oplus} x)_\beta \in \\ \in S(b, r), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Благодаря условию (1.39), всякая траектория  $u(t) = U(t, x)$  на отрезке  $[0, \tau(x)]$  будет ограниченной. Точнее верна следующая лемма.

**Лемма 1.3.** Для  $\forall K_1 < \infty \exists K_2 < \infty \forall x \in R^m$ , если  $\|x\| \leq K_1$ , то  $\sup \{\|U(t, x)\| : t \in [0, \tau(x)]\} \leq K_2$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольно  $x \in R^m$  со значением  $\tau(x) > 0$  (при  $\tau(x) = 0$  доказательство тривиально). Из определения  $\tau(x)$  следует, что для любого  $t \in [0, \tau(x))$

$$\|U_\beta(t, x) - b\| \leq r.$$

Будем считать, что это соотношение выполнимо и для  $t = \tau(x)$ , поскольку в случае  $(\tau(x), x) \notin \text{dom } U$  оператор  $U_\beta$  можно доопределить по непрерывности

$$\lim_{t \rightarrow \tau(x)} U_\beta(t, x) = U_\beta(\tau(x), x).$$

Введем оператор

$$f(t, v) = f_{\beta\perp}(t, U_\beta(t, x) \overset{\beta}{\oplus} v),$$



действующий из пространства  $[0, \tau(x)] \times R^{n-m}$  в  $R^{n-m}$ . Он непрерывно дифференцируем и удовлетворяет неравенству

$$\sup_{[0, \tau(x)] \times R^{n-m}} \left\| \frac{\partial \tilde{f}(t, v)}{\partial v} \right\| < \infty,$$

вытекающему из условия (1.39). Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений [110] известно, что в таком случае задача Коши

$$\dot{v} = \tilde{f}(t, v), \quad v(0) = (a \overset{\alpha}{\oplus} x)_{\beta \perp}$$

на отрезке  $[0, \tau(x)]$  имеет единственное решение  $v(t)$ , причем

$$\forall K_1 < \infty \quad \exists K < \infty \quad \|v(t)\| \leq K, \quad 0 \leq t \leq \tau(x),$$

если  $\|x\| < K_1$ . Легко также видеть, что

$$v(t) = U_{\beta \perp}(t, x).$$

Принимая все это во внимание, заключаем: если  $\|x\| \leq K_1$ , то

$$\|U(t, x)\| = (\|U_{\beta}(t, x)\|^2 + \|U_{\beta \perp}(t, x)\|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq ((\|b\| + r)^2 + K^2)^{1/2} \equiv K_2, \quad 0 \leq t \leq \tau(x).$$

Лемма доказана.

Из определения функции  $\tau(x)$  и леммы 1.3 вытекают следующие свойства: если  $\tau(x) > 0$ , то  $(t, x) \in \text{dom } U$ ,  $U_{\beta}(t, x) \in S(b, r)$ ,  $0 \leq t \leq \tau(x)$ ; если  $0 < \tau(x) < 1$ , то

$$\|U_{\beta}(\tau(x), x) - b\| = r,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists s \in (\tau(x), \tau(x) + \varepsilon) \quad \|U_{\beta}(s, x) - b\| > r.$$

Кроме того, можно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.4.** *Функция  $\tau(x)$  полунепрерывна сверху, т. е.  $\forall \bar{x} \in \in R^m \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in R^m, \quad \|x - \bar{x}\| \leq \delta$  влечет за собой  $\tau(\bar{x}) \geq \tau(x) - \varepsilon$ .*

**Доказательство.** Допустим, есть точка  $\bar{x} \in R^m$ , в которой функция  $\tau(x)$  не является полунепрерывной сверху, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in S(\bar{x}, \delta), \quad \tau(\bar{x}) < \tau(x) - \varepsilon.$$

Тогда  $\tau(\bar{x}) < 1$  и, значит,

$$\exists s \in (\tau(\bar{x}), \tau(x) + \varepsilon) \quad \varepsilon_0 \equiv \|U_{\beta}(s, \bar{x}) - b\| - r > 0.$$

Ввиду этого

$$\begin{aligned} \|U_{\beta}(s, x) - b\| &\geq \|U_{\beta}(s, \bar{x}) - b\| - \|U_{\beta}(s, \bar{x}) - U_{\beta}(s, x)\| = \\ &= r + \varepsilon_0 - \|U_{\beta}(s, \bar{x}) - U_{\beta}(s, x)\|, \end{aligned}$$

но из непрерывности оператора  $U_{\beta}(s, \cdot)$  вытекает

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \forall x \in S(\bar{x}, \delta_0) \quad \|U_{\beta}(s, \bar{x}) - U_{\beta}(s, x)\| < \varepsilon_0,$$

поэтому

$$\|U_{\beta}(s, x) - b\| > r, \quad \forall x \in S(\bar{x}, \delta_0).$$

Следовательно,

$$\forall x \in S(\bar{x}, \delta_0), \quad \tau(x) < s < \tau(\bar{x}) + \varepsilon.$$

Из полученного противоречия следует доказательство леммы.

Решать краевую задачу (1.36) — (1.38) будем с помощью следующей итерационной схемы стрельбы:

$$x^{k+1} = x^k - \eta_k z^k, \quad z^k = A^k \Phi^k(x^k), \quad (1.40)$$

$$\eta_k \in \operatorname{argmin}_{\eta \geq 0} ((1 - \tau(x^k - \eta z^k))^2 + \|\Phi^k(x^k - \eta z^k)\|^2)^{1/2},$$

$$k = 0, 1, \dots, x^0 \in \{x \in R^m : \tau(x) > 0\},$$

где  $A^k$  — некоторая  $m \times m$ -матрица,

$$\Phi^k(x) = U_\beta(\tau(x^k), x) - b.$$

Ниже будут указаны условия, при выполнении которых процесс (1.40) происходит следующим образом:

$$\tau(x^{k+1}) > \tau(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, l-1,$$

$$\tau(x^k) = 1, \quad \|U_\beta(1, x^{k+1}) - b\| \leq d \|U_\beta(1, x^k) - b\|, \quad (1.41)$$

$$k = l, l+1, \dots, d < 1, \quad l < \infty.$$

Выясним, когда из (1.41) следует сходимость пристрелочных траекторий к решению краевой задачи.

**Лемма 1.5.** Пусть имеется ограниченная последовательность  $x^k \in \{x \in R^m : \tau(x) = 1\}$ ,  $k = l, l+1, \dots$ , для которой  $U_\beta(1, x^k) \rightarrow b$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда краевая задача (1.36) — (1.38) имеет решение  $u^*(t)$ , и если других решений не существует, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, 1]} \|U(t, x^k) - u^*(t)\| = 0.$$

**Доказательство.** Введем обозначение  $u^k(t) = U(t, x^k)$ . По условию

$$\exists K_1 < \infty \quad \|x^k\| \leq K_1, \quad \tau(x^k) = 1, \quad k = l, l+1, \dots,$$

поэтому согласно лемме 1.3

$$\exists K_2 < \infty \quad \max_{t \in [0, 1]} \|u^k(t)\| \leq K_2,$$

какой бы номер  $k$  ни взять. Таким образом, последовательность  $\{u^k(t)\}$  равномерно ограничена. Так как

$$\forall k \quad \|u^k(t)\| \leq \sup \{\|f(t, u)\| : t \in [0, 1], \|u\| \leq K_2\} < \infty,$$

равномерно ограниченной является также последовательность  $\{\dot{u}^k(t)\}$ . Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.2.

Рассмотрим конкретно варианты схемы (1.40), в частности вариант когда матрица  $A^k$  в (1.40) определяется в соответствии с методом Ньютона:

$$A^k = (\Phi^{k'}(x^k))^{-1}. \quad (1.42)$$

**Теорема 1.4.** Пусть удовлетворены следующие условия:

1) если  $\exists \Delta \in (0, +\infty) \forall x \in R^m, (a \overset{\alpha}{\oplus} x)_\beta \in S(b, r), \tau(x) < 1$  и  $\exists t_1 \in (\tau(x), 1] U_\beta(t_1, x) \in S(b, r)$ , то  $\exists t_0 \in (\tau(x), t_1] U_\beta(t_0, x) \in R^m \setminus S(b, r + \Delta)$ ;

2) на множестве  $D = \{(t, x) \in [0, 1] \times R^m : t = \tau(x)\}$

$$\det \left( \frac{\partial U_\beta(t, x)}{\partial x} \right) \neq 0,$$

причем

$$\exists N < \infty \sup_D \left\| \left( \frac{\partial U_\beta(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} \right\| \leq N;$$

3)  $\forall t \in [0, 1]$  оператор  $U_\beta(t, \cdot)$  имеет на множестве  $\{x : (t, x) \in \text{dom } U\}$  ограниченную вторую производную  $\Gamma$  то  $\frac{\partial^2 U_\beta(t, x)}{\partial x^2}$ ;

4)  $\exists x^0 \in R^m \| (a \overset{\alpha}{\oplus} x^0)_\beta - b \| < r$ ;

5)  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-m}\}$  или  $\tau(x^0) > \max \tau(x), \| (a \overset{\alpha}{\oplus} x)_\beta - b \| = r$ ;

6) множество  $X_0 = \{x \in R^m : \tau(x) \geq \tau(x^0)\}$  ограничено.

Тогда решение  $u^*(t)$  краевой задачи (1.36) — (1.38) существует. Если других решений нет, то для итерационного процесса (1.40), (1.42)

$$\exists l < \infty \quad \tau(x^k) = 1, \quad k = l, l+1, \dots,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq 1} \|U(t, x^k) - u^*(t)\| = 0.$$

**Доказательство.** Проанализируем произвольный  $k$ -й шаг процесса (1.40), (1.42)

$$x^{k+1} = x^k - \eta_k z^k, \quad z^k = (\Phi^{k*}(x^k))^{-1} \Phi^k(x^k),$$

предполагая по индукции, что

$$\tau(x^k) \geq \tau(x^0), \quad \| (a \overset{\alpha}{\oplus} x^k)_\beta - b \| < r.$$

Покажем, что данное определение вектора  $x^{k+1}$  корректно. Согласно условию 2 матрица Якоби  $\Phi^{k*}(x^k)$  обратима и, следовательно, вектор  $z^k$  (направление перехода от  $x^k$  к  $x^{k+1}$ ) определен. Докажем существование  $\eta_k$ . Введем обозначение

$$\Theta_k(\eta) = ((1 - \tau(x^k - \eta z^k))^2 + \|\Phi^k(x^k - \eta z^k)\|^2)^{1/2}.$$

Надо доказать непустоту множества

$$\arg \min_{\eta \geq 0} \Theta_k(\eta).$$

При  $z^k = 0$  это очевидно. Если же  $z^k \neq 0$ , то

$$\exists \hat{\eta}_k > 0 \quad \forall \eta \geq \hat{\eta}_k \quad \tau(x^k - \eta z^k) < \tau(x^k),$$

иначе множество  $\{x : \tau(x) \geq \tau(x^k)\}$  было бы неограниченным, но это невозможно, так как оно включено в множество  $x_0$ , которое по условию 6 ограничено. Следовательно, для любого значения  $\eta > \hat{\eta}_k$

$$\Theta_k(\eta) = ((1 - \tau(x^k - \eta z^k))^2 + r^2)^{1/2} > ((1 - \tau(x^k))^2 + r^2)^{1/2} \geq \Theta_k(0),$$

т. е.  $\Theta_k(\eta) > \Theta_k(0)$ . Поэтому

$$\operatorname{argmin}_{\eta \geq 0} \Theta_k(\eta) = \arg \min_{\eta \in [0, \hat{\eta}_k]} \Theta_k(\eta).$$

Остается отметить, что на основании леммы 1.4 функция  $\Theta_k(\eta)$  непрерывна снизу, поэтому на отрезке  $[0, \hat{\eta}_k]$  достигает своей точной нижней грани [111, с. 475]. Существование  $\eta_k$  доказано.

Введем обозначение

$$x^{k+1}(\eta) = x^k - \eta z^k, \quad \eta \geq 0.$$

Условие 2 дает оценку

$$\|(\Phi^{k'}(x^k))^{-1}\| \leq N,$$

используя которую получаем

$$\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| = \eta \|z^k\| \leq \|(\Phi^{k'}(x^k))^{-1}\| \|\Phi^k(x^k)\| \leq \eta N \|\Phi^k(x^k)\|, \quad (1.43)$$

а так как  $\|\Phi^k(x^k)\| \leq r$ , то

$$\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| \leq \eta N r. \quad (1.44)$$

Возьмем  $\eta$  из промежутка

$$0 \leq \eta \leq \frac{\delta}{Nr}, \quad (1.45)$$

где

$$\delta = \Delta \exp(-L),$$

$$L = \sup_{t \in [0, 1]} \sup_{u \in \omega_0(\Delta)} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\|,$$

$$\omega_0(\Delta) = \{u \in R^n : \exists \bar{u} \in \omega_0 \|u - \bar{u}\| \leq \Delta\},$$

$$\omega_0 = \{U(t, x) : \tau(x^0) \leq t \leq \tau(x)\}.$$

С помощью леммы 1.3 и условия 6 об ограниченности множества  $X_0$  нетрудно установить, что множество  $\omega_0$  ограничено. Ограниченным является и его « $\Delta$ -расширение»  $\omega_0(\Delta)$ . Поэтому определенная выше величина  $L$  конечна.

Из (1.44), (1.45) следует, что

$$\|x^{k+1}(\eta) - x^k\| \leq \delta = \Delta \exp(-L).$$

Применяя лемму Гронуолла [115], имеем

$$\|U(t, x^{k+1}(\eta)) - U(t, x^k)\| \leq \|x^{k+1}(\eta) - x^k\| \exp(L) \leq \Delta, \quad 0 \leq t \leq \tau(x^k).$$

Отсюда вытекает следующее:

$$\forall t \in [0, \tau(x^k)] \quad U_B(t, x^{k+1}(\eta)) \in S(b, r + \Delta), \quad (1.46)$$

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x^{k+1}(\eta) + (1 - \lambda) x^k \in \operatorname{dom} \Phi^k,$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|\Phi^{k''}(\lambda x^{k+1}(\eta) + (1-\lambda)x^k)\| \leq M = \sup_{[0,1] \times X_0(\delta) \cap \text{dom } U} \left\| \frac{\partial^2 U_\beta(t, x)}{\partial x^2} \right\|, \quad (1.47)$$

$$X_0(\delta) = \{x \in R^m : \exists \bar{x} \in X_0 \|x - \bar{x}\| \leq \delta\}.$$

Отметим, что  $M < \infty$ . Это следует из условия 3 об ограниченности  $\frac{\partial^2 U_\beta(t, x)}{\partial x^2}$  и условия 6 об ограниченности  $X_0$ .

Получим оценку для нормы  $\Phi^k(x^{k+1}(\eta))$ :

$$\begin{aligned} \|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\| &\leq \|1 - \eta\| \cdot \|\Phi^k(x^k)\| + \|\Phi^k(x^{k+1}(\eta)) - \Phi^k(x^k) - \\ &- \Phi^{k''}(x^k)(x^{k+1}(\eta) - x^k)\| \leq \|1 - \eta\| \|\Phi^k(x^k)\| + \sup_{\lambda \in [0,1]} \|\Phi^{k''}(\lambda x^k + \\ &+ (1-\lambda)x^{k+1}(\eta))\| \|x^{k+1}(\eta) - x^k\|^2 \leq (\|1 - \eta\| + MN^2 r \eta^2) \|\Phi^k(x^k)\|. \end{aligned}$$

Здесь использованы неравенство треугольника, теорема 3.3.6 из [88] о среднем значении, а также соотношения (1.43), (1.47).

Полагая

$$\eta = \bar{\eta} = \min \left\{ 1; \frac{\delta}{Nr}; \frac{1}{2MN^2 r} \right\},$$

находим искомую оценку:

$$\begin{aligned} \|\Phi^k(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| &\leq d \|\Phi^k(x^k)\|, \\ d = 1 - \bar{\eta} + MN^2 r \bar{\eta}^2 &< 1. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Оценку (1.48) перепишем в виде

$$\|U_\beta(\tau(x^k), x^{k+1}(\bar{\eta})) - b\| \leq d \|U_\beta(\tau(x^k), x^k) - b\|. \quad (1.49)$$

Отсюда

$$\|U_\beta(\tau(x^k), x^{k+1}(\bar{\eta})) - b\| \leq r.$$

Используя это соотношение, методом от противного докажем, что

$$\|(a \overset{\alpha}{\oplus} x^{k+1}(\bar{\eta}))_\beta - b\| < r, \quad \tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) \geq \tau(x^k).$$

Допустим, что

$$(a \overset{\alpha}{\oplus} x^{k+1}(\bar{\eta}))_\beta \in S(b, r), \quad \tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) < \tau(x^k).$$

Тогда, полагая в условии 1  $x = x^{k+1}(\bar{\eta})$ ,  $t_1 = \tau(x^k)$ , заключаем, что

$$\exists t_0 \in (\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})), \tau(x^k)), \quad U_\beta(t_0, x^{k+1}(\bar{\eta})) \in R^m \setminus S(b, r + \Delta).$$

Получаем противоречие с (1.46), значит, принятое допущение неверно. Пусть

$$(a \overset{\alpha}{\oplus} x^{k+1}(\bar{\eta}))_\beta \notin S(b, r),$$

тогда найдется число  $\hat{\eta} \in (0, \bar{\eta})$ , для которого  $\|(a \overset{\alpha}{\oplus} x^{k+1}(\hat{\eta}))_\beta - b\| = r$ .

Ввиду условия 5  $\tau(x^{k+1}(\hat{\eta})) < \tau(x^k)$ . Отсюда так же, как и раньше,

с помощью условия 1 приходим к противоречию. Допустим наконец, что  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) \geq \tau(x^k)$ , но  $\|(a \overset{\alpha}{\oplus} x^{k+1}(\bar{\eta}))_{\beta} - b\| = r$ . Тогда согласно условию 5  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) < \tau(x^0) \leq \tau(x^k)$ . Получаем противоречие. Таким образом, установлено, что  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) \geq \tau(x^k)$ . Чтобы оценить разность  $\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) - \tau(x^k)$ , заметим, что

$$\|U_{\beta}(t', x) - U_{\beta}(t'', x)\| \leq K(t' - t''),$$

$$K \equiv \sup_{[0,1] \times \omega_0} \|f_{\beta}(t, u)\| < \infty,$$

если  $U(t, x) \in \omega_0$ ,  $t'' \leq t \leq t'$  (как показано выше, множество  $\omega^0$  ограничено). Возьмем здесь

$$t' = \tau(x^{k+1}(\bar{\eta})), \quad t'' = \tau(x^k), \quad x = x^{k+1}(\bar{\eta}).$$

Будем иметь

$$\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) - \tau(x^k) \geq K^{-1} \|U_{\beta}(\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})), x^{k+1}(\bar{\eta})) - U_{\beta}(\tau(x^k), x^{k+1}(\bar{\eta}))\| \geq K^{-1} (\|U_{\beta}(\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})), x^{k+1}(\bar{\eta})) - b\| - \|U_{\beta}(\tau(x^k), x^{k+1}(\bar{\eta})) - b\|).$$

Это соотношение и оценка (1.49) приводят к заключению о том, что

$$\tau(x^{k+1}(\bar{\eta})) - \tau(x^k) \geq \min\{1 - \tau(x^k); K^{-1}r(1 - d)\}. \quad (1.50)$$

Непосредственно из определения  $\eta_k$ ,  $x^{k+1}$  видно, что

$$\tau(x^{k+1}) = \tau(x^{k+1}(\eta_k)) \geq \tau(x^{k+1}(\bar{\eta})),$$

$$\|\Phi^k(x^{k+1})\| = \|\Phi^k(x^{k+1}(\eta_k))\| = \|\Phi^k(x^{k+1}(\bar{\eta}))\|,$$

поэтому оценки (1.48), (1.50) приводят к следующему результату:

$$\tau(x^{k+1}) - \tau(x^k) \geq \min\{1 - \tau(x^k), K^{-1}r(1 - d)\},$$

$$\|\Phi^k(x^{k+1})\| \leq d \|\Phi^k(x^k)\|, \quad d < 1.$$

Следовательно,

$$\exists l \leq \frac{(1 - \tau(x^0))K}{r(1 - d)}, \tau(x^k) = 1, \quad k = l, l + 1, \dots,$$

$$\|U_{\beta}(1, x^k) - b\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство завершается применением леммы 1.5.

*Замечание 1.9.* Несложно проверить, что условие 1 в теореме 1.4 будет выполнено, если (см. замечание 1.6)

$$\left( \frac{\partial f_{\beta}(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial f_{\beta}(t, u)}{\partial u} f(t, u) \right)^T (u_{\beta} - b) + \|f_{\beta}(t, u)\|^2 \geq 0; \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$r \leq \|u_{\beta} - b\| \leq r + \Delta$$

$$u = U(t, x), \quad (a \overset{\alpha}{\oplus} x)_{\beta} \in S(b, r).$$

*Замечание 1.10.* Условие 6 теоремы 1.4 при  $\alpha = \beta^{\perp}$  выполняется автоматически: если  $\|x^0 - b\| < r$ , то  $\tau(x^0) > 0$  и множество  $X_0 =$

$= \{x : \tau(x) \geq \tau(x^0)\}$  ограничено так как в этом случае  $X \subset S(b, r)$ . Для ограниченности множества  $X_0$  в общем случае достаточно, чтобы оператор  $U_\beta(t, \cdot)$  при любом фиксированном  $t \in [\tau(x_0), 1]$  обладал следующим свойством: для любой последовательности  $\{x_k\} \subset R^m$  такой, что

$$\{(t, x^k)\} \subset \text{dom } U, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|(a \oplus x^k)_{\beta \perp}\| = \infty,$$

выполняется равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|U_\beta(t, x^k)\| = \infty.$$

Обоснование простейшего варианта процедуры (1.40), в котором

$$A^k = E \quad (1.51)$$

есть единичная матрица, вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 1.5.** Пусть выполнены условия 1, 4, 5 теоремы 1.4 и, кроме того, при любом  $t \in [\tau(x^0), 1]$  оператор  $U_\beta(t, \cdot)$  равномерно монотонный на некотором множестве из  $R^m$ , точнее,

$$\begin{aligned} \exists \mu > 0 \quad (U_\beta(t, x') - U_\beta(t, x''))^T (x' - x'') &\geq \mu \|x' - x''\|^2, \\ \forall x', x'' \in \{x : U_\beta(s, x) \in S(b, r + \Delta), 0 \leq s \leq t\}. \end{aligned}$$

Тогда краевая задача (1.36) — (1.38) имеет единственное решение  $u^*(t)$  и итерационный процесс (1.40), (1.51) определяет последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  такую, что

$$\begin{aligned} \exists l < \infty \quad u^k(t) \in S(b, r), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k = l, l+1, \dots, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, 1]} \|u^k(t) - u^*(t)\| = 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Оно совершенно аналогично доказательству теоремы 1.4 (см. также теорему 1.3). Отметим лишь некоторые отличительные особенности.

Оценку для  $\|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|$ , где  $x^{k+1}(\eta) = x^k - \eta \Phi^k(x^k)$ ,  $0 \leq \eta \leq \delta/r$ , находят из условия о равномерной монотонности оператора  $U_\beta(t, \cdot)$ . Согласно этому условию

$$(\Phi^k(x^k) - \Phi^k(x^{k+1}(\eta)))^T (x^k - x^{k+1}(\eta)) \geq \mu \|x^k - x^{k+1}(\eta)\|^2.$$

Разность  $x^k - x^{k+1}(\eta)$  заменим на  $\eta \Phi^k(x^k)$ , получим

$$\Phi^k(x^{k+1}(\eta))^T \Phi^k(x^k) \leq (1 - \mu\eta) \|\Phi^k(x^k)\|^2.$$

Используя это неравенство и тождество

$$\|a\|^2 = 2a^T b + \|a - b\|^2 - \|b\|^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|^2 &= 2\Phi^k(x^{k+1}(\eta))^T \Phi^k(x^k) + \|\Phi^k(x^k) - \Phi^k(x^{k+1}(\eta))\|^2 - \\ &- \|\Phi^k(x^k)\|^2 \leq (1 - 2\mu\eta + C^2\eta^2) \|\Phi^k(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где  $C = \sup_{([0,1] \times \omega_0(\Delta)) \cap \text{dom } U} \left\| \frac{\partial U_\beta(t, x)}{\partial x} \right\|$  является константой Липшица для оператора  $\Phi^k$  на шаре  $S(x^k, \delta)$ . После подстановки  $\eta = \bar{\eta} = \min \left\{ \frac{\delta}{r}; \frac{\mu}{C^2} \right\}$  в неравенство приходим к искомой оценке

$$\begin{aligned} \|\Phi^k(x^{k+1}(\bar{\eta}))\| &\leq d \|\Phi^k(x^k)\|, \\ d &= (1 - 2\mu\bar{\eta} + C^2\bar{\eta}^2)^{1/2} < 1. \end{aligned}$$

Отметим, что множество  $X_0 = \{x : \tau(x) \geq \tau(x^0)\}$  в условиях данной теоремы оказывается ограниченным. Действительно, пусть  $x \in X_0$ ,  $x \neq x_0$ , тогда по условию о равномерной монотонности

$$(U_\beta(\tau(x^0), x) - U_\beta(\tau(x^0), x^0))^T (x - x^0) \geq \mu \|x - x^0\|^2,$$

откуда

$$\|x - x^0\| \leq \mu^{-1} \|U_\beta(\tau(x^0), x) - U_\beta(\tau(x^0), x^0)\| \leq \frac{2r}{\mu}$$

и, значит,  $\|x\| \leq \|x^0\| + \frac{2r}{\mu}$ .

Наконец, отметим, что в условиях данной теоремы краевая задача не может быть разрешима более чем однозначно. В этом легко убедиться, используя равномерную монотонность оператора  $U_\beta(1, \cdot)$ .

## § 2. Метод последовательной стрельбы на подотрезках отрезка интегрирования

**Границы практического применения метода стрельбы. Алгоритмы последовательной стрельбы.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u_\alpha(0) &= a, \quad u_\beta(1) = b, \\ u_\beta(t) &\in S(b, r), \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $f: [0, 1] \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-m})$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ,

$$\begin{aligned} a \in R^{n-m}, \quad b \in R^m, \quad 1 \leq m < n, \quad S(b, r) &= \{x \in R^m : \|x - b\| \leq r\}, \\ r &\in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Предполагается, что оператор  $f$  имеет непрерывную производную, причем

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial f_{\beta,1}(t, u)}{\partial u_{\alpha,1}} \right\| : t \in [0, 1], u_\beta \in S(b, r) \right\} < \infty. \quad (2.2)$$

Предполагается также, что решение  $u^*(t)$  краевой задачи существует и единственно.

Выше для решения этой задачи применялся метод стрельбы с прерыванием траекторий при выходе их  $\beta$ -проекций из шара  $S(b, r)$ .



Была предложена итерационная пристрелочная процедура, позволяющая строить последовательность  $x^k \in R^m$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , сходящуюся к корню  $x^* = u_\alpha^*(0)$  системы стыковки

$$\tau(x) = 1, \quad U_\beta(1, x) = b, \quad (2.3)$$

где  $U(t, x)$  — решение  $u(t)$  задачи Коши  $u = f(t, u)$ ,  $u(0) = a \oplus^\alpha x$ ,

$$\tau(x) =$$

$$= \begin{cases} \sup \{t \in [0, 1] : U_\beta(t', x) \in S(b, r), \text{ если } (a \oplus^\alpha x)_\beta \in S(b, r), 0 \leq t' \leq t \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствующая последовательность траекторий  $u^k(t) = U(t, x^k)$  равномерно сходится к  $u^*(t)$ . Следовательно, теоретически решение краевой задачи может быть получено с любой наперед заданной точностью.

Однако на практике в связи с применением ЭВМ дело обстоит иначе. Указанный метод стрельбы к успеху не приводит, если решение задачи Коши обладает повышенной чувствительностью к изменению начальных данных. Для удовлетворительного решения краевой задачи корень системы стыковки нужно тогда найти с точностью, которая не достижима при счете на ЭВМ.

Поясним сказанное. Пусть дано  $\varepsilon > 0$  и требуется по методу стрельбы найти приближенное решение  $\tilde{u}(t)$  краевой задачи (2.1) такое, что

$$\|\tilde{u}(t) - u^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.4)$$

С этой целью решаем систему стыковки (2.3). В реальных условиях наилучшая точность, которая может быть достигнута при ее решении,

$$\delta \approx \kappa(1 + \|x^*\|),$$

где  $\kappa > 0$  — относительная погрешность округления чисел в ЭВМ. Пусть  $\delta < \varepsilon$  и пусть приближенный корень системы стыковки  $\tilde{x}$  найден:

$$\|\tilde{x} - x^*\| \leq \delta.$$

Введем обозначение

$$L = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\| : t \in [0, 1], \|u - u^*(t)\| \leq \varepsilon \right\},$$

$$\Delta = \min \left\{ 1; \frac{1}{L} \ln \left( \frac{\varepsilon}{\delta} \right) \right\}.$$

С помощью леммы Гронуолла получаем, что

$$\|U(t, \tilde{x}) - u^*(t)\| = \|U(t, \tilde{x}) - U(t, x^*)\| \leq \|\tilde{x} - x^*\| \exp(Lt) \leq \delta \exp(Lt) \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, \Delta].$$

Отсюда можно сделать следующие выводы.

Если константа Липшица

$$L \leq \ln \left( \frac{\varepsilon}{\delta} \right),$$

то краевая задача в принципе поддается решению методом стрельбы. Действительно, в этом случае значение  $\Delta = 1$  и, следовательно, траектория  $u(t) = U(t, \tilde{x})$  удовлетворяет (2.4), т. е. является искомым  $\varepsilon$ -приближенным решением краевой задачи.

Если

$$L > \ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right),$$

то  $\Delta < 1$  и траектория  $U(t, \tilde{x})$  на участке может как угодно сильно отличаться от точного решения  $u^*(t)$ . Поэтому метод стрельбы может в этом случае оказаться непригодным.

Таким образом, существует довольно широкий класс задач, для решения которых метод стрельбы не пригоден. Этот факт хорошо освещен в литературе [69, 104, 114, 124, 138, 149]. В частности, показано [114], что краевые задачи для так называемых П-систем, с помощью которых описывается принцип максимума Понтрягина в теории оптимального управления, являются, как правило, «плохими» для метода стрельбы.

Известны модификации метода стрельбы, с помощью которых препятствие, связанное с неустойчивостью траекторий, может быть преодолено. Среди них — метод параллельной (множественной) стрельбы [30, 104, 126, 138]. Этому методу, а также различным его комбинациям с другими методами, в последнее время уделяется большое внимание. Вопросы теоретического обоснования и практической реализации метода параллельной стрельбы интенсивно разрабатываются [44, 86, 87, 130, 131, 136, 143—145, 146]. При ведении параллельной стрельбы вычисляются  $Q$  пристрелочных траекторий на  $Q$  подотрезках отрезка интегрирования. С увеличением числа  $Q$  влияние неустойчивости ослабляется. В этом заключается основное преимущество метода. Его недостаток состоит в том, что система параллельной стыковки имеет довольно большую размерность (порядка  $nQ$ ). Решение этой системы требует больших затрат на вычисление.

В настоящей работе предлагается метод последовательной организации пристрелочных процедур. Опишем его общую схему применительно к задаче (2.1).

Отрезок интегрирования  $[0, 1]$  разбивается на  $Q$  подотрезков точками

$$S_0 = 0 < S_1 < \dots < S_Q = 1.$$

Приближенное решение  $\tilde{u}(t)$  краевой задачи строится за  $Q$  шагов. На очередном шаге  $q = 0, 1, \dots, Q - 1$  применяется пристрелочная процедура с точкой выстрела  $S_q$  и в результате находится  $\tilde{u}(t)$  на участке  $S_q \leq t \leq S_{q+1}$ .

Опишем подробнее произвольный  $q$ -й шаг алгоритма. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(t, u), \quad S_q \leq t \leq 1, \quad u_{\alpha q}(S_q) = a^q, \\ u_{\beta}(1) &= b, \quad u_{\beta}(t) \in S(b, r), \quad S_q \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\alpha^0 = a$ ,  $\alpha^0 = \alpha$ , а если  $q > 0$ , то

$$\alpha^q = (\alpha_1^q, \dots, \alpha_{n-m}^q)$$

(некоторый мультииндекс, его компоненты  $\alpha_i^q$  представляют собой параметры алгоритма), вектор

$$a^q = \tilde{u}_{\alpha^q}(S_q),$$

определяется в результате  $(q-1)$ -го шага. Шаг состоит в применении к задаче (2.5) метода стрельбы с прерыванием траекторий. Стрельба ведется траекториями  $U^q(t, x)$  системы  $\dot{u} = f(t, u)$  с начальным условием вида

$$u(S_q) = a^q \oplus x, \quad x \in R^m.$$

Момент прерывания траектории  $U^q(t, x)$  определяется по формуле

$$\tau_q(x) = \begin{cases} \sup \{t \in [S_q, 1] : U_{\beta}^q(t', x) \in S(b, r), S_q \leq t' \leq t\}, \\ \text{если } (a^q \oplus x)_{\beta} \in S(b, r), \\ S_q - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В результате применения пристрелочной процедуры находят  $\delta$ -приближенный корень системы стыковки

$$\tau_q(x) = 1, \quad U_{\beta}^q(1, x) = b \quad (2.6)$$

т. е. таковой вектор  $\tilde{x}^q$ , что

$$\|\tilde{x}^q - x^{*q}\| \leq \delta,$$

где  $x^{*q}$  — точный корень системы (2.6), параметр  $\delta > 0$ . Производится присваивание

$$\tilde{u}(t) = U^q(t, \tilde{x}^q), \quad S_q \leq t \leq S_{q+1},$$

и на этом работа  $q$ -го шага заканчивается. Если  $q < Q$ , то делается переход к выполнению  $(q+1)$ -го шага алгоритма.

Таким образом, алгоритм последовательной стрельбы описан. Его параметрами являются  $\{S_q\}$ ,  $\{\alpha_i^q\}$  и  $\delta$ . Нужно задать их значения такими, чтобы получаемую по этому алгоритму вектор-функцию  $\tilde{u}(t)$  можно было бы принять в качестве приближенного решения краевой задачи (2.1), т. е. чтобы вектор-функция  $\tilde{u}(t)$  была в некотором смысле близка к точному решению  $u^*(t)$ . Справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.1.** Пусть  $u^i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , есть решение задачи Коши

$$\dot{u} = f(t, u), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad u(t_1) = v^i,$$

тогда

$$\|u_{\beta}^1(t) - u_{\beta}^2(t)\| \leq \|v_{\beta}^1 - v_{\beta}^2\| + \|v^1 - v^2\|(\exp(L(t-t_1)) - 1),$$

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad \forall L \geq \max_{\substack{t \in [t_1, t_2] \\ i=1,2}} \left\| \frac{\partial f(t, u^i(t))}{\partial u} \right\|.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$v(t) = u^1(t) - u^2(t).$$

По неравенству Гронуолла

$$\|v(t)\| \leq \|v(t_1)\| \exp(L(t - t_1)), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

С помощью этой оценки получаем

$$\begin{aligned} \|v_\beta(t)\| &= \|v_\beta(t_1) + \int_{t_1}^t (f_\beta(t', u^1(t')) - f_\beta(t', u^2(t'))) dt'\| \leq \|v_\beta(t_1)\| + \\ &+ L \int_{t_1}^t \|v(t')\| dt' \leq \|v_\beta(t_1)\| + L \|v(t_1)\| \int_{t_1}^t \exp(L(t' - t_1)) dt' \leq \\ &\leq \|v_\beta(t_1)\| + \|v(t_1)\| (\exp(L(t - t_1)) - 1), \quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**Теорема 2.1.** Пусть задано  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\min_{0 \leq t \leq 1} \|u_\beta^*(t) - b\| < r - \varepsilon, \quad (2.7)$$

$$L \equiv \max_{0 \leq t \leq 1} \max_{u_\beta \in S(u_\beta^*(t), \varepsilon)} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\| < \infty, \quad (2.8)$$

и пусть параметры алгоритма последовательной стрельбы подчинены условиям

$$0 < \delta < \min \left\{ \varepsilon; \frac{\varepsilon}{L} \right\}, \quad (2.9)$$

$$\{\beta_1, \dots, \beta_m\} \subseteq \{\alpha_1^q, \dots, \alpha_{n-m}^q\}, \quad q = 1, 2, \dots, Q-1, \quad (2.10)$$

$$S_{q+1} - S_q \leq \Delta_q, \quad q = 0, 1, \dots, Q-1, \quad (2.11)$$

где  $\Delta_q$  — положительный корень уравнения

$$\varepsilon = \begin{cases} \delta \exp(L\Delta) & \text{при } q = 0, \\ \delta (\exp(L\Delta) - 1) + \frac{\varepsilon(1 - S_q - \Delta)}{1 - S_q} & \text{при } q > 0. \end{cases}$$

(Отметим, что существование  $\Delta_q$  гарантируется условиями (2.8), (2.9). Предположим также, что для любого  $q \in \{1, 2, \dots, Q-1\}$  и любого вектора  $A \in R^{n-m}$  такого, что

$$\|(A \oplus x)_\beta - u_\beta^*(S_q)\| \leq \varepsilon \quad (2.12)$$

(это условие в силу (2.10) фактически не зависит от вектора  $x \in R^m$ ), краевая задача

$$\dot{u} = f(t, u), \quad S_q \leq t \leq 1, \quad u_{\alpha^q}(S_q) = A, \quad (2.13)$$

$$u_\beta(1) = b, \quad u_\beta(t) \in S(b, r), \quad S_q \leq t \leq 1,$$

имеет единственное решение  $u^{*q}(t; A)$ , причем

$$\|u_\beta^{*q}(t; A) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon \frac{1-t}{1-S_q}, \quad \forall t \in [S_q, 1]. \quad (2.14)$$

Тогда процесс последовательной стрельбы определен корректно, т. е. на каждом его шаге  $q$  система стыковки (2.6) имеет единственный корень  $x^{*q}$ , а траектория  $U^q(t, \tilde{x}^q)$ , соответствующая ее  $\delta$ -приближенному корню  $\tilde{x}^q \in S(x^{*q}, \delta)$ , на отрезке  $S_q \leq t \leq S_{q+1}$  ограничена. В результате этого процесса находят вектор-функцию  $\tilde{u}(t)$ , для которой справедлива оценка

$$\|\tilde{u}_\beta(t) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.15)$$

**Доказательство.** Применим метод индукции по шагу  $q$ . Проанализируем сначала шаг  $q = 0$ . В этом случае единственный корень системы стыковки (2.6) есть

$$x^{*0} = u_{\alpha 1}^*(0).$$

Так как существует предположение (2.2), то траектория  $U^0(t, \tilde{x}^0)$  на промежутке  $0 \leq t \leq \tau_0(\tilde{x}^0)$  ограничена (см. лемму 1.3, § 1). Покажем, что  $\tau_0(\tilde{x}^0) \geq \tilde{S}_1$  и

$$\|\tilde{u}_\beta(t) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq S_1. \quad (2.16)$$

Используя неравенство Гронуолла и условие (2.11), для произвольного  $t \in [0, \min\{\tau_0(\tilde{x}^0), S_1\}]$  получаем

$$\begin{aligned} \|U_\beta^0(t, \tilde{x}^0) - u_\beta^*(t)\| &= \|U_\beta^0(t, \tilde{x}^0) - U_\beta^0(t, x^{*0})\| \leq \|\tilde{x}^0 - x^{*0}\| \exp(Lt) \leq \\ &\leq \delta \exp(L\Delta_0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|U_\beta^0(t, \tilde{x}^0) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \min\{\tau_0(\tilde{x}^0), S_1\}. \quad (2.17)$$

Допустим, что  $\tau_0(\tilde{x}^0) < S_1$ , тогда из (2.7), (2.17) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|U_\beta^0(\tau_0(\tilde{x}^0), \tilde{x}^0) - b\| &\leq \|U_\beta^0(\tau_0(\tilde{x}^0), \tilde{x}^0) - u_\beta^*(\tau_0(\tilde{x}^0))\| + \\ &+ \|u_\beta^*(\tau_0(\tilde{x}^0)) - b\| < \varepsilon + (r - \varepsilon) = r, \end{aligned}$$

показывающее неверность допущения. Значит,  $\tau_0(\tilde{x}^0) \geq S_1$ . Оценка (2.16) справедлива, так как она тождественна доказанной оценке (2.17).

Сделаем следующее предположение: пусть завершен  $(q-1)$ -й шаг процесса последовательной стрельбы ( $q \in \{1, 2, \dots, Q-1\}$ ), функция  $\tilde{u}(t)$  построена на участке  $0 \leq t \leq S_q$  и

$$\|\tilde{u}_\beta(t) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq S_q. \quad (2.18)$$

Докажем, что на шаге  $q$  функция  $\tilde{u}(t)$  корректно достраивается на подотрезке  $[S_q, S_{q+1}]$ , при этом

$$\|\tilde{u}_\beta(t) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad S_q \leq t \leq S_{q+1}. \quad (2.19)$$

Для  $a^q = \tilde{u}_{\alpha^q}(S_q)$  и любого  $x \in R^m$  вследствие (2.10), (2.18):

$$\|a^q \oplus^{\alpha^q} x\|_{\beta} - u_{\beta}^*(S_q) = \|\tilde{u}_{\beta}(S_q) - u_{\beta}^*(S_q)\| \leq \varepsilon,$$

т. е. условие (2.12) при  $A = a^q$  выполнено. Согласно предположению, краевая задача (2.13) в таком случае имеет единственное решение  $u^{*q}(t; a^q)$ . Поэтому система стыковки (2.6) однозначно разрешима, ее корень

$$x^{*q} = u_{\alpha^q \perp}^{*q}(S_q; a^q).$$

Далее, предположение (2.2) обеспечивает ограниченность траектории  $U^q(t, \tilde{x}^q)$ ,  $\tilde{x}^q \in S(x^{*q}, \delta)$ , на участке  $S_q \leq t \leq \tau_q(\tilde{x}^q)$ . Надо показать, что  $\tau_q(\tilde{x}^q) \geq S_{q+1}$  и справедливо неравенство (2.19).

По неравенству треугольника для любого  $t \in [S_q, \min\{\tau_q(\tilde{x}^q), S_{q+1}\}]$

$$\|U_{\beta}^q(t, \tilde{x}^q) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \|U_{\beta}^q(t, \tilde{x}^q) - U_{\beta}^q(t, x^{*q})\| + \|u_{\beta}^{*q}(t; a^q) - u_{\beta}^*(t)\|. \quad (2.20)$$

Первое слагаемое в (2.20) оценим с помощью леммы 2.1, полагая в ней

$$u^1(t) = U^q(t, \tilde{x}^q), \quad u^2(t) = U^q(t, x^{*q}),$$

$$t_1 = S_q, \quad t_2 = \min\{\tau_q(\tilde{x}^q), S_{q+1}\}$$

и учитывая условие (2.11), а также равенство

$$U_{\beta}^q(S_q, \tilde{x}^q) = (a^q \oplus^{\alpha^q} \tilde{x}^q)_{\beta} = (a^q \oplus^{\alpha^q} x^{*q})_{\beta} = U_{\beta}^q(S_q, x^{*q}),$$

вытекающее из (2.10). Заключаем, что

$$\|U_{\beta}^q(t, \tilde{x}^q) - U_{\beta}^q(t, x^{*q})\| \leq \| \tilde{x}^q - x^{*q} \| (\exp(L(t - S_q)) - 1) \leq \delta (\exp(L\Delta_q) - 1) = \varepsilon - \frac{\varepsilon(1 - S_q - \Delta_q)}{1 - S_q}.$$

Для второго слагаемого в (2.20) справедлива оценка

$$\|u_{\beta}^{*q}(t; a^q) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \varepsilon \frac{1 - S_q - \Delta_q}{1 - S_q},$$

получаемая из (2.14) при  $A = a^q$  и (2.11). Следовательно,

$$\|U_{\beta}^q(t, \tilde{x}^q) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad S_q \leq t \leq \min\{\tau_q(\tilde{x}^q), S_{q+1}\}. \quad (2.21)$$

Допустим, что  $\tau_q(\tilde{x}^q) < S_{q+1}$ . Тогда  $\tau(\tilde{x}^q) < 1$  и, значит,

$$\|U_{\beta}^q(\tau_q(\tilde{x}^q), \tilde{x}^q) - b\| \geq r.$$

В то же время из (2.7), (2.21) следует, что

$$\|U_{\beta}^q(\tau_q(\tilde{x}^q), \tilde{x}^q) - b\| \leq \|U_{\beta}^q(\tau_q(\tilde{x}^q), \tilde{x}^q) - u_{\beta}^*(\tau_q(\tilde{x}^q))\| + \\ + \|u_{\beta}^*(\tau_q(\tilde{x}^q)) - b\| < r.$$

Полученное противоречие доказывает, что  $\tau_q(\tilde{x}^q) \geq S_{q+1}$ . Поскольку установлено неравенство (2.21), оценка (2.19) верна. Теорема доказана.

*Замечание 2.1.* Условие (2.14) будет выполнено, если для любой траектории  $u(t)$  дифференциальной системы  $\dot{u} = f(t, u)$  функция  $\varphi(t) = \|u_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\|$  является выпуклой вниз.

*Замечание 2.2.* Если в условиях теоремы 2.1. принять, что  $\varepsilon, \delta$  стремятся к нулю, оставляя ограничение сверху числа подотрезков  $Q$ , то будет выполняться сходимость

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|\tilde{u}(t) - u^*(t)\| \rightarrow 0.$$

Затраты на вычисления, связанные с реализацией метода последовательной стрельбы, зависят от способа разбиения отрезка интегрирования  $[0, 1]$  на подотрезки  $[S_q, S_{q+1}]$ ,  $q = 0, 1, \dots, Q-1$ . Если при определении точек  $S_q$  исходить из соотношений (2.11), то число всех подотрезков  $Q$  может оказаться чрезмерно завышенным. На практике нужны такие способы разбиения, которые минимизируют число  $Q$ , гарантируя при этом заданную точность получаемого решения.

Опишем алгоритм последовательной стрельбы, в котором разбиение отрезка интегрирования осуществляется «автоматически». Каждый шаг  $q$  алгоритма заключается в следующем. С помощью пристрелочной процедуры (например, одной из тех, которые предложены в § 1) находят двустороннее  $\delta$ -приближенное решение системы стыковки (2.6), т. е. такую пару  $(x^{1q}, x^{2q}) \in R^m \times R^m$ , что

$$\|x^{1q} - x^{2q}\| \leq 2\delta, \\ U_{\beta_i}^q(t, x^{1q}) \leq U_{\beta_i}^q(t, x^{*q}) \leq U_{\beta_i}^q(t, x^{2q}), \quad (2.22)$$

$$S_q \leq t \leq \min \{\tau_q(x^{1q}), \tau_q(x^{2q})\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, каждая (скалярная) траектория вида  $U_{\beta_i}^q(t, x^{*q})$ , соответствующая точному решению  $x^{*q}$  системы (2.6), оказывается «зажатой в вилку» траекториями  $U_{\beta_i}^q(t, x^{1q})$  и  $U_{\beta_i}^q(t, x^{2q})$ . Если при заданном  $\varepsilon > 0$

$$\exists j \in \{1, 2\}, \quad \tau_q(x^{jq}) = 1, \quad \|U_{\beta}^q(1, x^{jq}) - b\| \leq \varepsilon,$$

то функциям  $Q, S_{q+1}, \tilde{u}(t)$  присваиваются значения

$$Q = q + 1, \quad S_{q+1} = 1, \quad \tilde{u}(t) = U^q(t, x^{jq}), \quad S_q \leq t \leq 1,$$

и работа алгоритма прекращается. В противном случае принимается

$$S_{q+1} = \sup \{S \in [S_q, \min \{\tau_q(x^{1q}), \tau_q(x^{2q})\}] : \|U_\beta^q(t, x^{1q}) - U_\beta^q(t, x^{-q})\| \leq M_q(t, \varepsilon), S_q \leq t \leq S\}, \quad (2.23)$$

$$\tilde{u}(t) = (U^q(t, x^{1q}) + U^q(t, x^{2q}))/2, \quad S_q \leq t \leq S_{q+1}.$$

и делается переход к шагу  $q + 1$ . Здесь  $M_q(t, \varepsilon)$  — некоторая функция, подбираемая так, чтобы соблюдалось равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [S_q, 1]} M_q(t, \varepsilon) = 0.$$

Обоснование этого алгоритма при

$$M_q(t, \varepsilon) = \begin{cases} 2\varepsilon, & q = 0, \\ 2\varepsilon \frac{t - S_q}{1 - S_q}, & q > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

вытекает из теоремы, для доказательства которой необходима лемма.

**Лемма 2.2.** Если  $v^1, v^2, v^* \in R^m$  и

$$v_i^1 \leq v^* \leq v_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.25)$$

то

$$\left\| \frac{v^1 + v^2}{2} - v^* \right\| \leq \frac{1}{2} \|v^1 - v^2\|. \quad (2.26)$$

**Доказательство.** Введем обозначение

$$w^i = \frac{1}{2} (v^i - v^*), \quad i = 1, 2.$$

Соотношение (2.25) означает, что  $(w^1)^T w^2 \leq 0$ . Ввиду этого

$$\|w^1 + w^2\|^2 - \|w^1 - w^2\|^2 = 4(w^1)^T w^2 \leq 0.$$

т. е.

$$\|w^1 + w^2\| \leq \|w^1 - w^2\|.$$

Полученное неравенство эквивалентно (2.26).

**Теорема 2.2.** В описанном выше алгоритме последовательной стрельбы с автоматическим разбиением отрезка интегрирования функцию  $M_q(t, \varepsilon)$  определим по формуле (2.24) и положим

$$\alpha^q = \alpha(S_q), \quad q = 0, 1, \dots, Q - 1,$$

где  $\alpha(s)$  — функция, ставящая каждому  $s \in [0, 1]$  мультииндекс  $(\alpha_1(s), \dots, \alpha_{n-m}(s))$ , такая, что

$$\alpha(0) = \alpha, \quad (2.27)$$

$$\{\beta_1, \dots, \beta_m\} \subseteq \{\alpha_1(s), \dots, \alpha_{n-m}(s)\}, \quad \forall s \in (0, 1).$$

Предположим, что

$$\min_{0 \leq t \leq 1} \|u_\beta^*(t) - b\| \leq r - 2\varepsilon, \quad (2.28)$$



$$L \equiv \max_{0 \leq t \leq 1} \max_{\|u, -u_{\beta}^*(t)\| \leq \varepsilon} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \right\| < \infty, \quad (2.29)$$

$$0 < \delta < \min \{ \varepsilon/2; \varepsilon/L \} \quad (2.30)$$

и при любых  $s \in (0, 1)$ ,  $A \in R^{n-m}$ , удовлетворяющих соотношению

$$\| (A \oplus x)_{\beta} - u_{\beta}^*(s) \| \leq \varepsilon \quad (2.31)$$

(оно не зависит от  $x \in R^m$ , поскольку существует включение (2.27)), краевая задача

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(t, u), \quad s \leq t \leq 1, \\ u_{\alpha(s)}(s) &= A, \quad u_{\beta}(1) = b, \\ u_{\beta}(t) &\in S(b, r), \quad s \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

однозначно разрешима. Пусть также выполнимо следующее условие: если  $s \in [0, 1]$  и вектор-функция  $u(t)$  является решением системы

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u_{\beta}(t) \in S(b, r), \quad s \leq t \leq 1,$$

тогда функция  $\varphi(t) = \|u_{\gamma}(t) - u_{\beta}^*(t)\|$  на отрезке  $[s, 1]$  выпукла вниз и каждый шаг  $q$  алгоритма определен корректно, число всех шагов конечно и

$$\|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.33)$$

$$S_{q+1} - S_q \geq \min \{1 - S_q, \Delta_q\}, \quad q = 0, 1, \dots, Q-1, \quad (2.34)$$

где  $\Delta_q > 0$  — корень уравнения

$$\varepsilon = \begin{cases} \delta \exp(L\Delta), & q = 0, \\ \delta (\exp(L\Delta) - 1) + \varepsilon \frac{1 - S_q - \Delta}{1 - S_q}, & q > 0 \end{cases}$$

(он существует благодаря условиям (2.29), (2.30)).

**Доказательство.** Рассмотрим вначале шаг  $q = 0$ . Если

$$\exists j \in \{1, 2\} \tau_0(x^{j,0}) = 1, \quad \|U_{\beta}^0(1, x^{j,0}) - b\| \leq \varepsilon, \quad (2.35)$$

то  $Q = 0$ ,  $S_1 = 1$ ; оценка (2.33) в этом случае следствие выпуклости вниз функции

$$\varphi_0(t) = \|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| = \|U_{\beta}^0(t, x^{j,0}) - u_{\beta}^*(t)\|$$

и соотношений

$$\varphi_0(0) = \|(a \oplus x^{j,0})_{\beta} - u_{\beta}^*(0)\| \leq \|x^{j,0} - x^{*,0}\| \leq 2\delta < \varepsilon,$$

$$\varphi_0(1) = \|U_{\beta}^0(1, x^{j,0}) - b\| \leq \varepsilon.$$

Пусть (2.35) ложно, тогда, используя (2.22) — (2.24) при  $q = 0$ , с помощью леммы 2.2 получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| &= \|(U_{\beta}^0(t, x^{1,0}) + U_{\beta}(t, x^{2,0}))/2 - u_{\beta}^*(t)\| \leq \frac{1}{2} \|U_{\beta}^0(t, x^{1,0}) - \\ &- U_{\beta}^0(t, x^{2,0})\| \leq \frac{1}{2} M_0(t, \varepsilon) = \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq S_1. \end{aligned}$$

Учитывая ее, применим лемму Гронуолла и получим

$$\|U_{\beta}^0(t, x^{1,0}) - U_{\beta}^0(t, x^{2,0})\| \leq 2\delta \exp(Lt), \quad 0 \leq t \leq S_1.$$

Сопоставляя это неравенство с формулами (2.23), (2.24), которыми при  $q = 0$  определяется  $S_1$ , видим, что

$$S_1 \geq \min \{\Delta_0, \tau_0(x^{1,0}), \tau_0(x^{2,0})\}.$$

Ввиду (2.28) для  $0 \leq t \leq S_1$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\inf_{x \in R^m \setminus S(b,r)} \|x - U_{\beta}^0(t, x^{i0})\| \geq \inf_{x \in R^m \setminus S(b,r)} \|x - u_{\beta}^*(t)\| - \\ - \|u_{\beta}^*(t) - U_{\beta}^0(t, x^{i0})\| > 2\varepsilon - 2\varepsilon = 0.$$

Следовательно,  $S_1 \geq \min \{1, \Delta_0\}$ .

Поскольку (2.35) невозможно,  $S_1 < 1$ . Таким образом,

$$\Delta_0 \leq S_1 < 1, \quad \max_{[0, S_1]} \|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \varepsilon.$$

Предположим теперь, что вектор-функция  $\tilde{u}(t)$  на участке  $[0, S_q]$ ,  $q > 0$ ,  $S_q < 1$ , уже построена, причем

$$\max_{[0, S_q]} \|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \varepsilon \quad (2.36)$$

и процесс происходит на шаге  $q$ . Тогда корень  $x^{*q}$  системы стыковки (2.6) существует и единственный, поскольку краевая задача (2.32) при  $A = a^q = \tilde{u}_{\alpha}^q(S_q)$ ,  $s = S_q$  однозначно разрешима (выполнение (2.31) следует из (2.36)). В случае, когда

$$\exists j \in \{1, 2\} \quad \tau_q(x^{jq}) = 1, \quad \|U_{\beta}^q(1, x^{jq}) - b\| \leq \varepsilon, \quad (2.37)$$

имеем

$$q = Q - 1, \quad S_{q+1} = 1, \quad \max_{[S_q, 1]} \|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \varepsilon.$$

Последняя оценка получается как следствие выпуклости вниз функции

$$\varphi_q(t) = \|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| = \|U_{\beta}^q(t, x^{1q}) - u_{\beta}^*(t)\|$$

на отрезке  $[S_q, 1]$  и соотношений

$$\varphi_q(S_q) \leq \varepsilon, \quad \varphi_q(1) \leq \varepsilon,$$

вытекающих из (2.26), (2.37). Рассмотрим случай, когда (2.37) неверно. Используя неравенство треугольника, лемму 2.2 и неравенство (2.22), для  $t \in [S_q, S_{q+1}]$  получаем

$$\|\tilde{u}_{\beta}(t) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \left\| \frac{1}{2} (U_{\beta}^q(t, x^{1q}) + U_{\beta}^q(t, x^{2q})) - U_{\beta}^q(t, x^{*q}) \right\| + \\ + \|U_{\beta}^q(t, x^{*q}) - u_{\beta}^*(t)\| \leq \frac{1}{2} \|U_{\beta}^q(t, x^{1q}) - U_{\beta}^q(t, x^{2q})\| + \\ + \|U_{\beta}^q(t, x^{*q}) - u_{\beta}^*(t)\|.$$

Первое слагаемое в правой части в силу (2.23), (2.24) не превосходит

$$\frac{1}{2} M_q(t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{t - S_q}{1 - S_q}.$$

Для второго слагаемого выполняется оценка

$$\|U_\beta^q(t, x^{*q}) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon \frac{1-t}{1-S_q},$$

так как функция

$$\varphi_q^*(t) = \|U_\beta^q(t, x^{*q}) - u_\beta^*(t)\|$$

на  $[S_q, 1]$  выпукла вниз,  $\varphi_q^*(1) = 0$  и вследствие (2.27), (2.36)

$$\varphi_q^*(S_q) = \|(a^q \oplus x_{\alpha_q \perp}^{*q})_\beta - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon.$$

Получается, что

$$\|\tilde{u}_\beta(t) - u_\beta^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad S_q \leq t \leq S_{q+1}. \quad (2.38)$$

Остается показать, что

$$S_q + \Delta_q \leq S_{q+1} < 1. \quad (2.39)$$

Используем лемму 2.1:

$$\begin{aligned} \|U_\beta^q(t, x^{1q}) - U_\beta^q(t, x^{2q})\| &\leq 2\delta(\exp(L(t - S_q)) - 1), \\ S_q &\leq t \leq S_{q+1}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.23), (2.24), (2.38) и предыдущие выкладки, нетрудно заключить, что

$$S_{q+1} \geq \min\{S_q + \Delta_q, \tau(x^{1q}), \tau(x^{2q})\}.$$

Из (2.28), (2.38) следует, что либо

$$S_{q+1} < \tau_q(x^{iq}), \quad i = 1, 2,$$

либо  $S_{q+1} = 1$ , но последнее справедливо только для (2.37). Следовательно, оценка (2.39) верна. Теорема доказана.

*Замечание 2.3.* Из оценки (2.34) вытекает, что выгодно брать  $\delta \leq \varepsilon \exp(-L)$ , поскольку при этом  $Q = 1$ . Однако на практике это не всегда возможно: реализовать алгоритм на ЭВМ удастся лишь при значениях  $\delta$ , не меньших некоторого положительного числа, зависящего от длины машинного слова. Кроме того, надо учитывать то обстоятельство, что с уменьшением  $\delta$ , хотя и сокращается число шагов, одновременно несколько возрастает объем вычислений на каждом шаге (связанных с поиском  $\delta$ -приближенного решения системы стыковки) и суммарные затраты могут увеличиться.

*Замечание 2.4.* Если

$$\frac{\partial f_i(t, u)}{\partial u_j} \geq 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \neq j, \quad \forall (t, u) \in [0, 1] \times R^n,$$

$$u_\beta \in S(b, r),$$

то оператор  $U_{\beta}^q(t, x)$  будет обладать следующим свойством изотонности: соотношение

$$x_i' \leq x_i'', \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

влечет за собой неравенства

$$U_{\beta_i}^q(t, x') \leq U_{\beta_i}^q(t, x''), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$S_q \leq t \leq \min \{ \tau_q(x'), \tau_q(x'') \}.$$

При наличии этого свойства нахождение двустороннего  $\delta$ -приближенного решения  $(x^{1q}, x^{2q})$  системы стыковки облегчается: можно взять

$$x^{1q} = \tilde{x}^q - \delta e, \quad x^{2q} = \tilde{x}^q + \delta e,$$

где  $e = (1, 1, \dots, 1) \in R^m$ ,  $\tilde{x}^q \in S(x^{*q}, \delta)$ .

*Замечание 2.5.* Точку  $S_{q+1}$  на каждом шаге можно определять по следующей «эвристической формуле»:

$$S_{q+1} = \Theta_q S_q + (1 - \Theta_q) \tau_q(\tilde{x}^q),$$

где  $\Theta_q \in (0, 1)$  — параметры, значения которых для заданной серии краевых задач находят в процессе вычислительных экспериментов. Такой подход, по сравнению с обоснованным выше способом определения  $S_{q+1}$  по формуле (2.23), требует больших затрат машинного времени, однако легче программируется.

**Решение некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.** Пусть необходимо решить квазилинейную двухточечную краевую задачу

$$\ddot{u} = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad u(t) \in [c, d], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.40)$$

где  $a, b, c, d \in (-\infty, \infty)$ ,  $f: [0, 1] \times R^1 \rightarrow R^1$ . Будем считать выполненными следующие условия:

1) функция  $f(t, u)$  непрерывна по  $t$  и непрерывно-дифференцируема по  $u$ , причем

$$\exists \mu > 0 \quad \exists L < \infty \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall u \in [c, d],$$

$$\mu \leq \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \leq L;$$

2) задача (2.40) имеет решение  $u^*(t)$  (единственное, в силу условия 1) такое, что

$$\exists \Delta > 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad u^*(t) \in [c + \Delta, d - \Delta].$$

Область интегрирования покроем сеткой  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ , введя обозначение  $h_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Краевую задачу (2.40) заменим разностной схемой

$$P_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) \equiv \frac{2}{(h_i + h_{i+1})} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \right.$$

$$-\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \Big) = f(t_i, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad u_0 = a, \quad u_N = b, \quad (2.41)$$

$$u_i \in [c, d], \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.42)$$

Введем обозначение

$$F_i(u, v) = \left(1 + \frac{h_{i+1}}{h_i}\right)v - \frac{h_{i+1}}{h_i}u + \frac{h_{i+1}(h_{i+1} + h_i)}{2} f(t_i, v),$$

тогда уравнения (2.41) можно переписать в виде, удобном для решения задач Коши:

$$u_{i+1} = F_i(u_{i-1}, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.43)$$

Определим функцию сдвига по траекториям системы (2.43):

$$U(i, s, x, y) = F_{i-1}(U(i-2, s, x, y), U(i-1, s, x, y)), \\ i \in \{s+2, \dots, N\}, \quad s \leq N-2,$$

$$U(s+1, s, x, y) = y, \quad U(s, s, x, y) = x, \quad x, y \in R^1, \quad s \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Введем также функцию прерывания траекторий:

$$\tau(s, x, y) = \begin{cases} \max \{i \leq N : U(j, s, x, y) \in [c, d], j = s, \dots, i-1\}, \\ \text{если } x \in [c, d], \quad s < N, \\ s \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Через  $\rho$  обозначим погрешность аппроксимации дифференциального оператора разностным оператором на решении краевой задачи, т. е.

$$\rho = \max_{1 \leq i \leq N-1} |P_i(u^*(t_{i-1}), u^*(t_i), u^*(t_{i+1})) - \ddot{u}(t_i)|.$$

Условие существования единственного решения разностной схемы (2.41), (2.42) определяется леммой.

**Лемма 2.3.** Если

$$\rho < \Delta\mu, \quad (2.44)$$

то разностная схема (2.41), (2.42) имеет единственное решение  $u_i^*$ , причем

$$\max_{0 \leq i \leq N} |u_i^* - u^*(t_i)| \leq \rho/\mu. \quad (2.45)$$

**Доказательство.** Разностной схеме поставим в соответствие систему стыковки

$$\tau(0, a, y) = N, \quad U(N, 0, a, y) = b, \quad y \in R^1. \quad (2.46)$$

Траектории вида  $U(i, 0, a, y)$  обладают следующими свойствами:

$$1) (U(i, 0, a, y') - U(i, 0, a, y''))(y' - y'') \geq (y' - y'')^2,$$

$$\forall y', y'' \in R^1, \quad \forall i \leq \min \{\tau(0, a, y'), \tau(0, a, y'')\};$$

$$2) \text{ если при некоторых } y \in R^1, j \leq \tau(0, a, y),$$

$$|U(j, 0, a, y) - u^*(t_j)| \leq \rho/\mu,$$

то

$$|U(i, 0, a, y) - u^*(t_i)| \leq \rho/\mu, \quad i = 0, 1, \dots, j.$$

Используя эти свойства, нетрудно показать, что при условии (2.44) система (2.46) имеет единственный корень  $y^*$ . Следовательно, траектория  $u_i^* = U(i, 0, a, y^*)$  есть единственное решение разностной схемы. Справедливость оценки (2.45) следует из свойства 2.

Условие (2.44) далее считаем выполненным. Пусть решение разностной схемы (2.41), (2.42) надо найти с точностью  $\varepsilon > 0$ :

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\tilde{u}_i - u_i^*| \leq \varepsilon. \quad (2.47)$$

Приближенное решение  $\tilde{u}_i$ , удовлетворяющее соотношению (2.47), будем находить по алгоритму последовательной стрельбы.

Каждый шаг  $q = 0, 1, \dots, Q - 1$  алгоритма начинается с применения процедуры стрельбы с прерыванием траекторий к разностной схеме

$$\begin{aligned} P_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) &= f(t_i, u_i), \quad i = S_q + 1, \dots, N - 1, \\ u_{S_q} &= a^{(q)}, \quad u_N = b, \\ u_i &\in [c, d], \quad i = S_q, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.48)$$

При  $q = 0$  здесь берется  $S_0 = 0$ ,  $a^{(0)} = a$ , т. е. на начальном шаге схема (2.48) тождественна исходной схеме (2.41), (2.42); при  $q > 0$  значения  $S_q$  и

$$a^{(q)} = \tilde{u}_{S_q}$$

определяются в конце шага  $(q - 1)$ . Разностной задаче (2.48) ставится в соответствие уравнение стыковки

$$\Phi^{(q)}(y) \equiv U(\tau(S_q, a^{(q)}, y), S_q, a^{(q)}, y) - b = 0;$$

для его решения удобно использовать известный алгоритм деления отрезка пополам [88]. Определяется двустороннее  $\delta$ -приближение к корню  $y^{(*q)}$  этого уравнения, т. е. такая пара  $(y^{(1q)}, y^{(2q)})$ , что

$$\begin{aligned} 0 &< y^{(2,q)} - y^{(1,q)} \leq 2\delta, \\ \Phi^{(q)}(y^{(1q)}) &\leq 0, \quad \Phi^{(q)}(y^{(2q)}) \geq 0. \end{aligned}$$

Траектории

$$\begin{aligned} u_i^{(kq)} &= U(i, S_q, a^{(q)}, y^{(kq)}), \\ i &= S_q, \dots, \tau(S_q, a^{(q)}, y^{(kq)}), \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

образуют «вилку» для точного решения

$$u_i^{(*q)} = U(i, S_q, a^{(q)}, y^{(*q)})$$

разностной схемы (2.48). Если

$$\exists l \in \{1; 2\}, \quad \|\Phi^q(y^{(lq)})\| \leq \varepsilon,$$

то полагают

$$\tilde{u}_i = u_i^{(lq)}, \quad i = S_q, \dots, N, \quad Q = q + 1;$$

шаг  $q$  является тогда последним. В противном случае вычисляется

$$S_{q+1} = \max \{ S \in \{S_q, \dots, \min \{ \tau(S_q, a^{(q)}, y^{(1,q)}), \tau(S_q, a^{(q)}, y^{(2,q)}) \} : |u_i^{(1q)} - u_i^{(2q)}| \leq M_q(i, \varepsilon), i = S_q, \dots, S \},$$

где

$$M_q(1, \varepsilon) = \begin{cases} 2\varepsilon, & \text{если } q = 0. \\ 2\varepsilon \frac{i - S_q}{N - S_q}, & \text{если } q > 0. \end{cases}$$

В качестве  $\tilde{u}_i$  на участке  $i = S_q, \dots, S_{q+1}$  берется

$$(u_i^{(1q)} + u_i^{(2q)})/2$$

и делается переход к шагу  $(q + 1)$ . Для обоснования этого алгоритма сформулируем следующую теорему.

**Теорема 2.3.** Пусть

$$N\delta < \varepsilon < \Delta - \rho\mu^{-1},$$

тогда решение  $u_i^*$  разностной схемы (2.41), (2.42) находится по методу последовательной стрельбы с точностью  $\varepsilon$ :

$$|\tilde{u}_i - u_i^*| \leq \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.49)$$

При этом число шагов алгоритма  $Q \leq \frac{\sqrt{L}}{\eta^*} + 1$ , где  $\eta^* > 0$  — корень уравнения  $\frac{\text{sh} \eta}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ ; если  $\frac{2\varepsilon}{\delta} \geq \frac{\text{sh}(\sqrt{L})}{\sqrt{L}}$ , то  $Q = 1$ .

Доказывается эта теорема так же, как и теорема 2.2. При доказательстве используется следующая лемма.

**Лемма 2.4.** Для любых  $A, B \in R^1$ ,  $s \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$  таких, что

$$|A - u_s^*| < \Delta - \mu^{-1}\rho, \quad |B - b| \leq \varepsilon,$$

разностная схема

$$P_I(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = f(t_i, u_i), \quad i = s + 1, \dots, N - 1,$$

$$u_s = A, \quad u_N = B,$$

$$u_i \in [c, d], \quad i = s, \dots, N$$

имеет единственное решение  $u_i^*(A, B)$ , причем

$$|u_i^*(A, B) - u_i^*| \leq |A - u_s^*| \frac{N-i}{N-s} + |B - b| \frac{i-s}{N-s}, \quad i = s, \dots, N.$$

Объединяя (2.45), (2.49), получаем оценку

$$|\tilde{u}_i - u^*(t_i)| \leq \frac{\rho}{\mu} + \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

которая показывает, что при достаточно малых значениях  $\rho$  и  $\varepsilon$  применение изложенного выше алгоритма последовательной стрельбы позволяет найти решение краевой задачи (2.40) с требуемой точностью.

### § 3. Численное решение тестовых и прикладных задач

Тестовая задача для квазилинейного уравнения с большой константой Липшица (задача Троеша). Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{u} = \lambda \operatorname{sh}(\lambda u), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad (3.1)$$

известную как тест Троеша [86, 104, 128, 131, 151]. Функция в правой части дифференциального уравнения монотонно возрастает по  $u$  со скоростью  $L = \lambda^2 \operatorname{ch}(\lambda u)$ , следовательно, решения соответствующих этому уравнению задач Коши являются неустойчивыми, причем эта неустойчивость усиливается при увеличении  $|\lambda|$ . По этой причине обычный метод стрельбы для задачи (3.1) становится нереализуемым на ЭВМ, начиная уже с  $|\lambda| \sim 5$ . Это отмечалось в работах [86, 104]. Применение других распространенных численных подходов также усложняется с увеличением  $|\lambda|$ . Из работ [86, 104, 137, 149] следует, что метод стрельбы с продолжением по параметру и метод параллельной стрельбы оказываются достаточно эффективными лишь при  $|\lambda| < 20$ .

Чтобы оценить возможности метода последовательной стрельбы, был выбран весьма значительный диапазон изменения параметра — от 5 до 200. Ставилась следующая цель: для значений  $\lambda = 5p$ ,  $p = 1, 2, \dots, 40$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  найти  $2\varepsilon$ -приближенное решение задачи (3.1) в точках  $j \cdot 10^{-2}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 100$ , т. е. найти такой вектор  $(v_0, \dots, v_{100})$ , при котором

$$\max_{0 \leq j \leq 100} |v_j - u^*(j \cdot 10^{-2})| \leq 2\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}. \quad (3.2)$$

Заметим, что точное решение  $u^*(t)$  существует, единственно и на промежутке  $0 \leq t \leq 1$  монотонно возрастает от нуля до единицы. Ввиду этого задача (3.1) представляет частный случай задачи (2.40) из § 2 при  $f = \lambda \operatorname{sh}(\lambda u)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -\Delta$ ,  $d = 1 + \Delta$ ,  $\Delta > 0$ .

Задача (3.1) была заменена разностной схемой Эйлера

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = h^2 \lambda \operatorname{sh}(\lambda u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.3) \\ u_0 = 0, \quad u_N = 1, \quad Nh = 1.$$

Описанный в § 2 алгоритм последовательной стрельбы реализовывался в виде PL/I-программы на ЭВМ М-4030 при  $\delta = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\Delta = 10^{-1}$ . Согласно теореме 2.3 (см. § 2) в результате работы этого алгоритма находят  $\varepsilon$ -приближенное решение схемы (3.3), т. е. вектор  $(\tilde{u}_0^{(N)}, \dots, \tilde{u}_N^{(N)})$ , для которого

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\tilde{u}_i^{(N)} - u_i^{*(N)}| \leq \varepsilon, \quad (3.4)$$

где  $\{u_i^{*(N)}\}$  — точное решение схемы (3.3).

Если  $N = 100r$ , а  $r \in \{1, 2, \dots\}$  достаточно велико, то в качестве искомого  $2\varepsilon$ -приближенного решения задачи (3.1) можно взять вектор с компонентами

$$v_j = \tilde{u}_{rj}^{(N)}, \quad j = 0, 1, \dots, 100.$$



Действительно, ввиду (3.4),

$$\max_{0 \leq j \leq 100} |\tilde{u}_{rj}^{(N)} - u^*(j \cdot 10^{-2})| \leq \varepsilon + \max_{0 \leq j \leq 100} |u_{rj}^{*(N)} - u^*(j \cdot 10^{-2})|,$$

но последнее слагаемое стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , так как в силу леммы 2.3

$$\max_{0 \leq i \leq N} |u_i^{*(N)} - u^*(ih)| \leq \rho \lambda^{-2},$$

где погрешность аппроксимации

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \ddot{u}^*(ih) - \frac{u^*((i+1)h) - 2u^*(ih)}{h^2} + \frac{u^*((i-1)h)}{h^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{h^2}{12} \max_{0 \leq t \leq 1} |\lambda^3 \operatorname{sh}(\lambda u^*(t)) ((u^*(t))^2 + \operatorname{ch}(\lambda u^*(t)))| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $r = (100h)^{-1} \rightarrow \infty$ , следовательно, при достаточно большом значении  $r$  приближенное решение  $v_i = \tilde{u}_{rj}^{(N)}$  удовлетворяет требуемому неравенству (3.2).

Определение этого достаточно большого, но не слишком завышенного значения  $r = \bar{r}$  (и соответствующего значения  $N = \bar{N} \equiv \equiv 100\bar{r}$ ) производилось путем численных экспериментов на последовательности сгущающихся сеток. Точнее, вычислялись величины

$$\Delta_r = \tilde{u}_{r\bar{j}}^{(100r)} - \tilde{u}_{(r+1)\bar{j}}^{(100(r+1))},$$

$$\bar{j} = \arg \max_{0 \leq j \leq 100} |\tilde{u}_{rj}^{(100r)} - \tilde{u}_{(r+1)j}^{(100(r+1))}|, \quad r = 1, 2, \dots,$$

и в качестве  $\bar{r}$  принималось то значение  $r$ , начиная с которого поведение  $\{\Delta_r\}$  становилось стабильным в пределах интервала  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Таким образом было найдено  $\bar{r} = 10$ , приемлемое для всех  $\lambda \in [5, 200]$ .

Результаты окончательных расчетов, проведенных на сетке с числом узлов  $N = 10^3$ , следующие:

$\lambda$	5	20	50	100	150	200
$v_{99}$	0,8945	0,2372	0,0604	0,0176	0,0073	0,0037
$Q$	1	2	5	8	12	16
$H$	26 478	39 462	42 941	36 309	45 006	46 555

Здесь  $Q$  — число пристрелочных процедур при решении задачи. По мере изменения  $\lambda$  от 5 до 200 значение  $Q$  постепенно увеличивалось от 1 до 16, отражая «повышение неустойчивости» задач Коши. Через  $H$  в выводе обозначено количество вычислений функций  $f \equiv \lambda \operatorname{sh}(\lambda u)$ , характеризующее время решения задачи (3.1) для фиксированного  $\lambda$ . Видно, что увеличение  $\lambda$  влияет на  $H$  незначительно.

Одномерная краевая задача для квазилинейного дифференциального уравнения с решением из класса обобщенных функций. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u'' &= f(x, u) - f_0(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

предполагая, что функция  $f(x, u)$  по аргументу  $u$  монотонна и удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$ , т. е.

$$0 \leq (f(x, u) - f(x, v))(u - v) \leq L(u - v)^2,$$

причем  $f(x, 0) = 0$ .

Введем равномерную сетку

$$\omega = \{x_i = ih : i = \overline{1, N-1}, \quad h = 1/N\}$$

и оператор точных разностных схем

$$T^x(\omega(\xi)) = \frac{1}{h^2} \int_{x-h}^x (\xi - x + h) \omega(\xi) d\xi + \frac{1}{h^2} \int_x^{x+h} (x + h - \xi) \omega(\xi) d\xi.$$

Аппроксимируем задачу (3.5) разностной схемой

$$y_{xx}^x = T^x(f(\xi, y - (x - \xi)y_x)) - T^x(f_0(\xi)), \quad x \in \omega, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (3.6)$$

Справедлива следующая теорема [76].

**Теорема 3.1.** Пусть  $f_0(x) \in L_2(0, 1)$ . Тогда  $\exists h_0 > 0$  такое, что  $\forall h \in (0, h_0]$ , разностная схема (3.6) для краевой задачи (3.5) будет обладать согласованной оценкой скорости сходимости вида

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega})} + \|(y - u)_x\|_{C(\omega)} \leq Mh^l \|u\|_{W_2^l(0,1)}, \quad (3.7)$$

$$0 < l \leq 2,$$

где  $M$  — константа, не зависящая от  $h$ ,  $\|\cdot\|_{C(\omega)}$  — норма в дискретном аналоге пространства  $C[0, 1]$ ,  $\|\cdot\|_{W_2^l(0,1)}$  — норма в соболевском пространстве  $W_2^l(0, 1)$ .

Отметим, что согласованная оценка (3.7) справедлива без каких-либо ограничений на константу Липшица  $L$ .

Для решения разностной схемы (3.6) использовался метод последовательной стрельбы. Для сравнения был также испытан один из традиционных методов решения нелинейных систем — метод последовательных приближений, согласно которому решение схемы находят с помощью итерационного процесса

$$y_{xx}^n - \lambda y^n = F y^{n-1} - \lambda y^{n-1}, \quad x \in \omega, \quad (3.8)$$

$$y^n(0) = y^n(1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $Fy$  — обозначение правой части в уравнении (3.6). Линейная задача (3.8) на каждом итерационном шаге  $n$  решается методом прогонки. По теории [138] сходимость итерационного процесса  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ y \end{smallmatrix} \right\}$  к решению  $y$  схемы (3.6) обеспечена, если  $\lambda \geq L$ .

Сравнение указанных методов было проведено на следующей модели:

$$\begin{aligned} u'' &= u^3 - f_0(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$f_0(x) = \begin{cases} px^{-\alpha} + \frac{p^3 x^3 (1 - x^{1-\alpha})^3}{(1-\alpha)^3 (2-\alpha)}, & 0 \leq \alpha < 1, \\ px^{-1} - p^3 x^3 \ln^3 x, & \alpha = 1, \end{cases}$$

$p \geq 0$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  — параметры. Точное решение задачи известно:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{px(1 - x^{1-\alpha})}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, & 0 \leq \alpha < 1, \\ -px \ln x, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Это решение принадлежит классу  $W_2^{(5/2-\alpha-\varepsilon)}(0, 1)$  при сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$ . В частности, при  $\alpha = 1/2$  функция  $u \in W_2^{1-\varepsilon}(0, 1)$ . В данном примере константа Липшица для функции  $f(x, u) \equiv u^3$  в области  $[0, \|u\|_C]$

$$L = 3\|u\|_C^2 = 3p^2(2-\alpha)^{(4\alpha-6)/(1-\alpha)}.$$

Заметим, что при увеличении  $\alpha$ ,  $p$  значение  $L$  возрастает.

Результаты решения разностной схемы (3.6) для задачи (3.9) при  $\alpha = 0, 0,5$ ,  $h = 0,01$  и  $p = 1 \div 10^4$  изображены на рис. 1, а, где

$$\delta = \frac{\ln \|u - y\|_C - \ln \|u\|_C}{\ln h},$$

сплошная кривая относится к методу последовательной стрельбы, штриховая — к методу последовательных приближений. Видно, что при  $p \leq 40$  оба метода дают одинаковую точность решения. По времени счета и затратам машинной памяти ни один из методов не выигрывает. Отметим, что при  $p \leq 40$  для решения задачи по методу последовательной стрельбы оказывалось достаточным не более двух пристрелочных процедур. Число итераций (3.8) (до стабилизации  $\begin{Bmatrix} n \\ y \end{Bmatrix}$  в интервале  $(a, b)$  длиной  $\|u\|_C \cdot 10^{-7}$ ) при  $\lambda = L$  колебалось в пределах 10—20, а при  $\lambda = 1,1L$  составляло уже 30—40. Что касается диапазона  $40 \leq p \leq 10^4$ , то, как видно из рис. 1, а, точность решения по

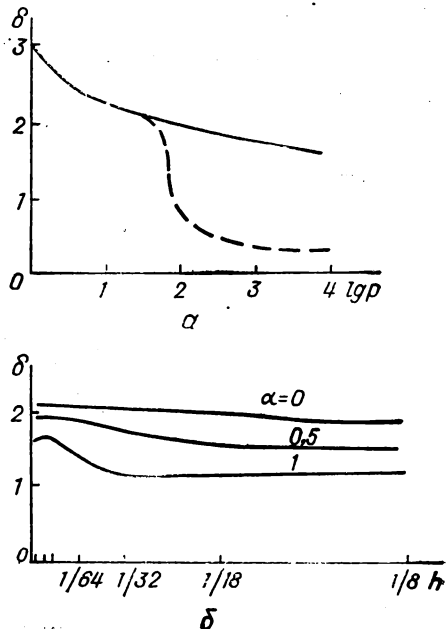


Рис. 1.

методу последовательной стрельбы значительно выше, чем по методу последовательных приближений. По этой причине свойства схемы (3.6) при  $p \geq 40$  исследовались методом последовательной стрельбы.

На рис. 1. б показаны найденные зависимости  $\delta$  от  $h$  при  $p = 300$  и различных  $\alpha$ . Можно сделать вывод о том, что краевая задача (3.9) решается по схеме вида (3.6) с точностью  $O(h^{2-\varepsilon})$ , если  $u \in W_2^{(s/2-\varepsilon)}(0, 1)$ , и с точностью  $O(h^{1/2-\varepsilon})$ , если  $u \in W_2^{1/2-\varepsilon}(0, 1)$ , где  $\varepsilon > 0$  может быть выбрано сколь угодно близким к нулю.

**Двухмерная краевая задача для квазилинейного дифференциального уравнения эллиптического типа с решением из класса обобщенных функций.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x, u) - f_0(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3.10)$$

в предположении, что

$$0 \leq (f(x, u) - f(x, v))(u - v) \leq L(u - v)^2,$$

$$f(x, 0) = 0, \quad f_0(x) \in W_2^{l-2}(\Omega), \quad 1 \leq l \leq 2,$$

где  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  — квадрат,  $\Gamma$  — его граница. Этой задаче ставится в соответствие разностная схема

$$\begin{aligned} \Delta y \equiv y_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2} &= T^{x_1} T^{x_2} (f(\xi_1, \xi_2, y - (x_1 - \xi_1) y_{\bar{x}_1} - (x_2 - \xi_2) y_{\bar{x}_2})) - \\ &- T^{x_1} T^{x_2} (f_0(\xi_1, \xi_2)), \quad x \in \omega, \quad y(x) = 0, \quad x \in \gamma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь  $\omega$  — сеточная область:

$$\omega = \{x = (x_1, x_2) : x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, \overline{N_\alpha - 1}, h_\alpha = 1/N_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

$\gamma$  — ее граница.

Точность схемы (3.11) определяется следующей теоремой.

**Теорема 3.2.** Разностная схема (3.11) для задачи (3.10) сходится со скоростью, определяемой оценкой

$$\|y - u^*\|_{L_2(\omega)} + |h| \cdot \|\nabla(y - u^*)\|_{L_2(\omega)} \leq M |h|^l \cdot \|u\|_{W_2^l(\Omega)}, \quad (3.12)$$

где

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & 1 < l \leq 2, \\ \tilde{u}(x), & l = 1, \end{cases}$$

$\tilde{u}(x)$  — усреднение решения  $u(x)$  по области малого диаметра,  $M$  — константа, не зависящая от  $h$ .

Отметим, что согласованные оценки вида (3.12) для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов установлены в работе [72, 79], в которой при их доказательстве для случая квазилинейных эллиптических уравнений использовалось предположение о достаточной малости константы Липшица  $L$ . В теореме 3.2 это предположение заменено условием монотонности функции  $f(x, u)$ , по  $u$ , а оценка (3.12) верна при любых значениях  $L$ .

Для нахождения решения разностной схемы (3.11) было составлено два алгоритма. В первом из них нелинейная разностная задача с помощью метода последовательных приближений сводится к последовательности линейных задач

$$\begin{aligned}\Lambda y - \lambda y &= F y^{n-1} - \lambda y^{n-1}, \quad x \in \omega, \\ \tilde{y} &= 0, \quad x \in \gamma; \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $Fy$  — сокращенная запись правой части первого из соотношений (3.11), параметр  $\lambda \geq L$ . Линейная эллиптическая задача (3.13) на каждом шаге  $n$  решается по релаксационному методу Р. П. Федоренко [112, 113]: сначала явным методом простой итерации

$$\begin{aligned}y^{(k+1)} &= y^{(k)} + \tau (\Lambda y^{(k)} - \lambda y^{(k)} - G), \\ G &= F y^{n-1} - \lambda y^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

находят приближение  $\tilde{y}$ , которое затем уточняется следующим образом. Вычисляется невязка

$$\varphi = \Lambda \tilde{y} - \lambda \tilde{y} - G^{n-1}$$

и на укрупненной в некоторое число  $M$  раз сетке составляется задача

по определению поправки  $\tilde{v} = \tilde{y} - y$ :

$$(\Lambda v)_{Mh} - \lambda v = \varphi, \quad x \in \omega_{Mh}, \quad v = 0, \quad x \in \gamma_{Mh}.$$

Эта задача решается методом переменных направлений [46, 98]:

$$\begin{aligned}(\tilde{v}_{x_1 x_1}^{(k+1/2)})_{Mh} - \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) \tilde{v}^{(k+1/2)} &= (\tilde{v}_{x_2 x_2}^{(k)})_{Mh} - \left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right) \tilde{v}^{(k)} + \varphi, \\ (\tilde{v}_{x_2 x_2}^{(k+1)})_{Mh} - \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) \tilde{v}^{(k+1)} &= \\ = -(\tilde{v}_{x_1 x_1}^{(k+1/2)})_{Mh} - \left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right) \tilde{v}^{(k+1/2)} + \varphi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \tilde{v}^{(0)} \equiv 0. \end{aligned}$$

Решение  $\tilde{y}$  задачи (3.13) определяется как  $\tilde{y} - \tilde{v}$  после интерполяции  $\tilde{v}$  на исходную сетку.

Во втором алгоритме идея метода Р. П. Федоренко применяется непосредственно к нелинейной задаче (3.11). На первом этапе алгоритма с помощью метода простой итерации

$$y^{n+1} = y^n + \tau (\Lambda y^n - F y^n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

отыскивается приближенное решение  $\tilde{y}$ . Оно уточняется на втором этапе. Вычисляется

$$\varphi = \Lambda \tilde{y} + T^{x_1} T^{x_2} (f_0(\xi_1, \xi_2))$$

и на укрупненной в  $M$  раз сетке решается задача для поправки  $v$ :

$$(\Delta v)_{Mh} = \Phi(v) + \varphi, \quad x \in \omega_{Mh},$$

$$v = 0, \quad x \in \gamma_{Mh},$$

$$\Phi(v) = -T^{x_1} T^{x_2} (f(\xi_1, \xi_2, \tilde{y} - v - (x_1 - \xi_1)(\tilde{y} - v_{\text{инт}}) \bar{x}_1 - \\ - (x_2 - \xi_2)(\tilde{y} - v_{\text{инт}}) \bar{x}_2)),$$

где  $v_{\text{инт}}$  — линейная интерполяция  $v$  на первоначальную сетку. Применяется нелинейный метод переменных направлений (метод Писмэна—Рэкфорда [88]):

$$(v_{x_1 x_1}^{m+1/2})_{Mh} - \mu v^{m+1/2} = -(v_{x_2 x_2}^m)_{Mh} - \mu v^m + \Phi(v^{m+1/2}) + \varphi,$$

$$(v_{x_2 x_2}^{m+1})_{Mh} - \mu v^{m+1} = -(v_{x_1 x_1}^{m+1/2})_{Mh} - \mu v^{m+1/2} + \Phi(v^{m+1/2}) + \varphi,$$

$$m = 0, 1, \dots, v \equiv 0.$$

Таким образом, по первому направлению решаются  $(N-1)$  нелинейных двухточечных краевых задач (здесь используется метод последовательной стрельбы), по второму —  $(N-1)$  линейных задач (используется метод прогонки). Искомое решение  $y$  схемы (3.11) определяется как разность  $\tilde{y} - v_{\text{инт}}$ .

Расчеты по изложенным алгоритмам были выполнены для следующей краевой задачи:

$$\Delta u = u^3 - f_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$f_0(x_1, x_2) = p^3 x_1^3 x_2^3 \ln^3 x_1 \ln^3 x_2 - \frac{p x_2 \ln x_2}{x_1} - \frac{p x_1 \ln x_1}{x_2}, \quad p > 0.$$

Точное ее решение

$$u(x_1, x_2) = p(x_1, x_2) \ln x_1 \ln x_2$$

принадлежит классу  $W_{2^{(s/4-\varepsilon)}}^{(s/4-\varepsilon)}(\Omega)$  при сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$ . Константа Липшица в данном примере

$$L = 3 \|u\|_C^2 = 3p^2 e^{-4}.$$

Реализация первого алгоритма показала, что процесс (3.13) быстро сходится только на первых 8—15 шагах, потом скорость сходимости резко замедляется. При  $p \leq 120$  этого числа шагов оказалось достаточно для получения хорошего решения, однако при больших значениях  $p$  последовательность  $y^n$  «не успевала» достаточно приблизиться к решению  $y$ . При реализации второго алгоритма подобные трудности не встречались.

На рис. 2 приведены зависимости

$$\delta = \frac{\ln \|u - y\|_{L_2} - \ln \|u\|_{L_2}}{\ln h}$$

от  $h$ . Для  $p = 50$  расчет сделан по первому алгоритму, для  $p = 300$  — по второму. В обоих случаях полагалось  $M = 2$  (т. е. сетка укрупнялась вдвое). Результатами расчетов подтверждается теоретический вывод о том, что схема (3.11) для задачи с решением из класса  $W_2^{(9/2-\varepsilon)}(\Omega)$  имеет точность  $O(h^{9/2-\varepsilon})$ .

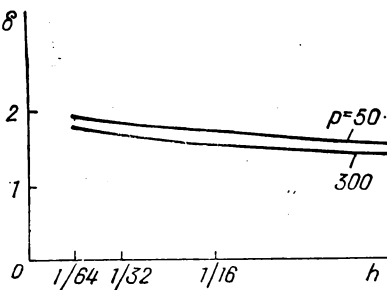


Рис. 2.

**Задача об укладке морского трубопровода.** Процесс укладки морского трубопровода (для транспортировки нефти или газа с месторождений континентального шельфа) представляет собой постепенное опускание его трубоукладочной баржи на дно моря. В изогнутой части опускаемой трубопроводной плети возникают большие напряжения, которые могут привести к смятию стенки трубы и другим повреждениям. Поэтому необходим расчет напряженно-деформированного состояния этой части трубопровода. Он позволяет выбрать безопасные с точки зрения прочности значения технологических параметров и найти оптимальный режим укладки.

Рассматриваемый участок трубопровода изображен на рис. 3, где  $H$  — глубина моря,  $p$  — погонный вес трубопровода в воде,  $R$  — тяговое усилие баржи,  $v$  — скорость поперечного морского течения. Начало системы координат  $OX_1X_2X_3$  совмещено с концом трубопровода, лежащим на дне. Другой конец находится на поверхности моря.

Введем безразмерные параметры:

$$\gamma = \frac{pH^3}{EI}, \quad t = \frac{l}{H}, \quad T = \frac{L}{H},$$

где  $EI$  — жесткость трубопровода на изгиб,  $l$  — расстояние по дуге от начала координат до текущей точки осевой линии трубопровода,  $L$  — длина трубопровода от точки касания его с дном до точки выхода на поверхность. Тогда определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемого участка трубопровода сводится к решению нелинейной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_4, \quad \dot{u}_2 = u_5, \quad \dot{u}_3 = u_6, \\ u_4 &= \gamma(u_8u_6 - u_9u_5), \quad u_5 = \gamma(u_9u_4 - u_7u_6), \\ u_6 &= \gamma(u_7u_5 - u_8u_4), \quad u_7 = u_{11}u_6 - u_{12}u_5, \\ \dot{u}_8 &= u_{12}u_4 - u_{10}u_6, \quad \dot{u}_9 = u_{10}u_5 - u_{11}u_4, \\ \dot{u}_{10} &= cv^2u_4u_6\sqrt{1-u_6^2}, \quad \dot{u}_{11} = 1 + cv^2u_5u_6\sqrt{1-u_6^2}, \\ \dot{u}_{12} &= -cv^2(1-u_6^2)^{3/2}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_i(0) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 5, \dots, 9, \\ u_4(0) &= 1, \quad u_{10}(0) = 9, \\ u_2(T) &= 1, \quad u_8(T) = u_9(T) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

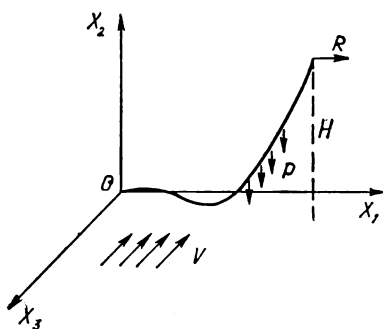


Рис. 3.

Здесь  $(u_1, u_2, u_3)$  — вектор, определяющий координаты осевой линии трубопровода в декартовой системе  $O X_1 X_2 X_3$ ;  $(u_4, u_5, u_6)$  — единичный вектор касательной к осевой линии, направленный в сторону возрастания  $t$ ;  $(u_7, u_8, u_9)$  и  $(u_{10}, u_{11}, u_{12})$  определяют соответственно момент и усилие в поперечном сечении трубопровода;  $c$  — некоторый коэффициент, зависящий от диаметра трубопровода. При выводе уравнений для  $u_{10}, u_{11}, u_{12}$  предполагалось, что сила воздействия на трубопровод морского течения оп-

ределяется только нормальной составляющей  $v_n$  скорости  $v$  этого течения (в данном примере  $v = (0, 0, -v)$ ):

$$F = cv_n |v_n| = c(v - \tau(v, \tau)) \sqrt{|v|^2 - (v, \tau)^2},$$

где  $\tau = (u_4, u_5, u_6)$ . Отметим, что отрезок интегрирования  $T$  в данной задаче — величина неизвестная, ее нужно находить.

Практически наибольший интерес представляет следующая область значений параметров:

$$\gamma \in [10^{-3}, 10^3], \quad g \in [0, 20\gamma^{-1/3}], \quad cv^2 \in [0, 1/2].$$

При значениях  $\gamma \leq 0, 1$ , соответствующих укладке трубопровода на малые глубины, краевая задача (3.14) решалась обычным методом стрельбы, основанным на модифицированном методе Ньютона, причем значение  $T$  определялось как момент удовлетворения условия  $u_2(I) = 1$ . Никаких осложнений при реализации этого метода не возникало. Трудности появились при значениях  $\gamma \geq 0, 1$ , которые соответствуют большим глубинам укладки. В области  $\gamma \in [10^{-1}, 5]$  применение метода стрельбы к сбою не приводило и решение краевой задачи находилось с хорошей точностью, однако это решение оказывалось совершенно неприемлемым: получалось, что трубопровод закручен в виде спирали и кривизна изгиба его огромна. При  $\gamma > 5$  методом стрельбы не удавалось получить даже «плохих решений», поскольку траектории дифференциальной системы оказывались очень чувствительными к малейшим изменениям компонент  $u_{11}(0), u_{12}(0)$ , причем увеличение параметров  $g, c, v$  только усложняло решение. Стало ясно, что использование метода стрельбы в этой области значений параметра  $\gamma$  бессмысленно.

При  $\gamma \in [10^{-1}, 10^3]$  краевую задачу (3.14) удалось решить с помощью метода последовательной стрельбы. Исходя из геометрических представлений относительно искомого решения были введены дополнительные условия

$$u_2 \leq 1, \quad u_4 \geq 0, \quad u_8 \geq -M, \quad u_9 \geq -M, \quad (3.15)$$

определяющие область однозначной разрешимости краевой задачи (значение  $M \approx 1/\gamma$  уточнялось в ходе вычислительных эксперимен-



тов). Траектории дифференциальной системы вычислялись по разностной схеме Рунге — Кутта четвертого порядка точности с шагом  $h = 10^{-2}$ . Прерывание вычислений производилось в момент нарушения хотя бы одного из неравенств (3.15). Точность численного интегрирования контролировалась проверкой соотношений баланса

$$u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 = 1 \quad (3.16)$$

(длина вектора касательной к осевой линии трубопровода равна единице) и

$$u_4 u_7 + u_5 u_8 + u_6 u_9 = 0 \quad (3.17)$$

(крутящий момент в трубопроводе отсутствует). Отметим, что в силу (3.16) компоненты  $u_1, \dots, u_6, u_{10}, u_{11}, u_{12}$  траекторий очень быстро расти не могут; что касается компонент  $u_7, u_8, u_9$ , то соотношения баланса не препятствуют их быстрому росту, и баланс действительно неоднократно наблюдался при вычислениях. Каждый шаг  $q = 0, 1, \dots, Q - 1$  алгоритма последовательной стрельбы основывался на методе Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - (A^k)^{-1} \Phi^k(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.18)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Phi_i^k(x) = U_{i+1}(\tau(x^k), x)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $A_{ij}^k = (\Phi_i^k(x^k + \Delta e^j) - \Phi_i^k(x^k))/\Delta$ ,  $e^1 = (1, 0)$ ,  $e^2 = (0, 1)$ ,  $\Delta > 0$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $U(t, x)$  — траектория с условиями

$$u_{11}(S_q) = x_1, \quad u_{12}(S_q) = x_2; \quad (3.19)$$

остальные начальные компоненты при  $q = 0$  определяются краевыми условиями задачи, а при  $(q > 0)$  — в результате  $(q - 1)$ -й пристрелочной процедуры (при некоторых параметрах задачи вместо условий (3.19) предпочтительнее брать  $u_8(S_q) = x_1$ ,  $u_9(S_q) = x_2$ ;  $\tau(x)$  — момент прерывания траектории  $U(t, x)$  при выходе из области (3.15). Процесс (3.18) прекращался, как только

$$\|x^l - x^{l-1}\| \leq \delta$$

или

$$\|\Phi^l(x^l)\| \leq \varepsilon.$$

Если последнее неравенство выполнялось, то работа алгоритма заканчивалась. В противном случае выполнялся следующий  $(q + 1)$ -й шаг последовательной стрельбы с точкой выстрела

$$S_{q+1} = S_q + \sigma(\tau(x^l) - S_q), \quad 0 < \sigma < 1$$

(вначале  $S_0 = 0$ ).

Ниже приводятся результаты расчетов, сделанных при  $\gamma = 10^3$ ,  $g = 2$ ,  $CV^2 = 0.5$ . В условиях (3.15) взято значение  $M = 4 \cdot 10^{-3}$ , в результате параметры алгоритма последовательной стрельбы были следующими:

$\Delta = 10^{-13}$ ,  $\delta = 10^{-8}$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 0.4$ . Значения незаданных на левом конце компонент  $u_{11}(0)$ ,  $u_{12}(0)$  вначале брались нулевыми. Это очень грубое начальное приближение, поскольку соответствующая

Таблица 1

$q$	$S_q$	$k$	$\det(A^k)$	$\tau(x^{k+1})$	$u_2(\tau)$	$u_3(\tau), 10^4$	$u_0(\tau), 10^4$	Счетчик вычислений правой части (3.14)
0	0	0	$10^{-1}$	0,13	$-10^{-4}$	-32	-63	136
		1	10	0,19	$10^{-3}$	-32	-65	316
		2	$10^2$	0,25	$10^{-2}$	-32	-65	568
		3	$10^6$	0,31	0,02	-32	-65	892
		4	$10^8$	0,37	0,03	-32	-64	1288
		5	$10^{10}$	0,43	0,04	-32	-64	1756
1	0,19	6	$10^{13}$	0,49	0,05	-32	-64	2296
		0	$10^8$	0,55	0,07	-32	-64	2680
		1	$10^{10}$	0,61	0,08	-31	-64	3136
2	0,38	2	$10^{12}$	0,67	0,09	-31	-63	3664
		0	$10^7$	0,73	0,12	-31	-63	4036
		1	$10^{10}$	0,79	0,14	-31	-62	4480
3	0,56	2	$10^{12}$	0,85	0,16	-31	-62	4996
		0	$10^7$	0,91	0,18	-30	-62	5368
		1	$10^{10}$	0,97	0,21	-30	-61	5812
4	0,74	2	$10^{12}$	1,03	0,23	-30	-60	6328
		0	$10^8$	1,09	0,26	-29	-60	6700
		1	$10^{10}$	1,15	0,29	-29	-60	7144
5	0,92	2	$10^{12}$	1,21	0,32	-29	-59	7660
		0	$10^8$	1,27	0,35	-29	-59	8032
		1	$10^{10}$	1,33	0,38	-28	-59	8476
6	1,10	2	$10^{13}$	1,39	0,41	-28	-58	8992
		0	$10^8$	1,45	0,45	-28	-57	9364
		1	$10^{10}$	1,51	0,48	-27	-57	9808
7	1,28	2	$10^{13}$	1,57	0,52	-27	-57	10324
		0	$10^8$	1,63	0,55	-27	-56	10696
		1	$10^{11}$	1,69	0,59	-27	-56	11140
8	1,46	2	$10^{13}$	1,75	0,63	-27	-55	11656
		0	$10^8$	1,81	0,67	-26	-55	12028
		1	$10^{11}$	1,87	0,71	-26	-54	12472
9	1,64	2	$10^{14}$	1,93	0,75	-25	-54	12988
		0	$10^8$	1,99	0,79	-25	-53	13360
		1	$10^{11}$	2,05	0,83	-25	-53	13804
10	1,82	2	$10^{14}$	2,11	0,87	-25	-52	14320
		0	$10^9$	2,17	0,91	-25	-52	14692
		1	$10^{11}$	2,23	0,95	-24	-52	15136
11	1,98	0	$10^7$	2,29	0,99	-25	-52	15460
		1	$10^{10}$	2,3	1,00	-0,62	-1,4	15836
		2	$10^{10}$	2,3	1,00	$-3,10^4$	$-10^{-3}$	16220

траектория вышла из допустимой области (3.15) уже в момент  $\tau = 0,08$  со значением  $u_2(\tau) = -0,002$ .

В табл. 1 показаны результаты каждого шага  $q$  работы алгоритма. Решение задачи, изображенное на рис. 4, было найдено за  $Q = 12$  последовательных пристрелочных процедур. Число итераций вида

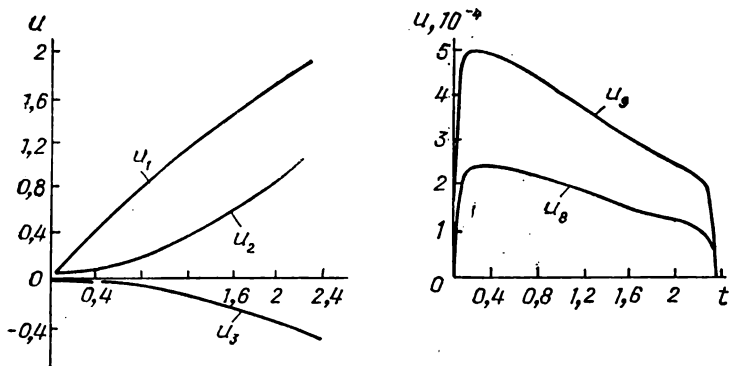


Рис. 4.

(3.18) в итоге составило 39, число выстрелов — 118. Тем не менее общая «стоимость» решения задачи составила всего  $18Nd$  вычислений правой части дифференциальной системы, где  $N$  — число узлов сетки,  $d$  — число вычислений правой части в каждом узле при решении задач Коши (в данном примере  $d = 4$ ,  $N = 230$ ). Соотношение баланса (3.16) удовлетворено с точностью  $10^{-7}$ , соотношение (3.17) — с точностью  $10^{-12}$ .

Таким образом, применяемая методика оказалась достаточно эффективной для расчета трубопроводов при их укладке на большие морские глубины и позволила находить оптимальные технологические параметры укладки.

#### § 4. Численные методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Построение и обоснование надежных численных методов решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений — одна из актуальных проблем вычислительной математики. Это связано с тем, что, с одной стороны, так называемые жесткие задачи в последнее время все чаще и чаще ставятся на практике, с другой — использование традиционных численных процедур для их решения малоэффективно. В последнее время разработан ряд численных методов, ориентированных на решение жестких задач, например метод Гира или подобные ему. Однако, к сожалению, и они не всегда удовлетворяют практическим запросам, поскольку, как и все методы, имеют свою область эффективного применения. В частности, они малоэффективны, если система уравнений, которую необходимо решать, имеет большую размерность, или, например, когда приходится иметь дело с очень жесткими задачами [42, 43, 51, 52, 93, 133—135, 139—142, 147, 152, 153].

Для задач средней жесткости и небольшой размерности, если отсутствуют режимы обострения, в настоящее время достаточно эффективными являются численные методы, с использованием обращения матриц типа Якоби. Однако их применение, например, для

исследования математических моделей химической кинетики уже не всегда оправдано. Не следует, по-видимому, многого ожидать и от многошаговых численных методов, реализуемых с помощью обращения матриц типа Якоби, хотя, с нашей точки зрения, здесь имеются возможности повышать их эффективность за счет использования методов высоких степеней точности. Можно было бы также отметить ряд отрицательных моментов и у отдельных типов дробно-рациональных численных методов.

Сделанные выше замечания обращают внимание на то, что необходимо и в этом вопросе идти двумя путями: совершенствовать имеющиеся численные методы и конструировать новые, более надежные, и расширять сферу их приложения. Далее приводится краткая характеристика численных методов, ориентированных на решение жестких задач, и описываются новые численные методы, которые были разработаны П. И. Бондарчуком, Р. В. Слоневским и их учениками [24, 25, 103].

Здесь приводятся конкретные вычислительные процедуры решения жестких задач, их обоснование, сведения о программной реализации рассматриваемых численных методов и результаты вычислений. Рассматриваются перспективы их применения при математическом моделировании сложных систем.

Приведем необходимые нам в дальнейшем понятия и вспомогательные результаты

Пусть  $Y^{(s)}$  — пространство  $s$  раз дифференцируемых функций  $y(x)$ , определенных на пространстве  $X$ , где  $s = 0, 1, 2, \dots, k$ . Рассмотрим способ дискретизации пространства  $X$  и пространства  $Y^{(s)}$ . Пусть на пространство  $X$  наложена некоторая сетка  $H^N(\omega)$ . Соответственно этой дискретизации пространства  $X$  рассматривается дискретизация пространства  $Y^{(s)}$ . Например, дискретизацию пространств  $(s = 0, 1, 2, \dots, k)$  в случае функций  $y(x)$  непрерывного аргумента  $x \in [a, b]$  будем понимать следующим образом. На отрезок  $[a, b]$  наложим сетку  $\omega = \{x_i, i = \overline{0, N}; x_0 = a; x_N = b; x_i < x_{i+1}\}$ , для которой точки  $x_i$  будем называть узлами сетки. Сетки  $\omega$  могут быть как равномерными, так и неравномерными. Вместо функции  $y(x)$ , определенной для всех  $x \in [a, b]$ , будем рассматривать сеточную функцию  $y_i = y(x_i)$  целочисленного аргумента  $i \mid i = \overline{0, N}$  или узла  $x_i$  сетки  $\omega$ . Аналогично в узлах сетки  $\omega$  рассматривается дискретизация производных  $y^{(s)}(x)$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ), с которыми также сопоставляются сеточные функции  $y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i)$  ( $i = \overline{0, N}, s = 1, 2, 3, \dots$ ).

Следовательно, в общем случае, пространство  $y^{(s)}$  функций  $y(x)$ , определенных на пространстве  $X$ , заменим конечномерным пространством  $y_{N+1}^{(s)} = \{y_i^{(s)}, i = \overline{0, N}; s = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  сеточных функций. Размерность пространства  $y_{N+1}^{(s)}$  равна  $N + 1$ . В дальнейшем всюду предполагается, что функции и их производные непрерывного аргумента заменены их дискретными аналогами. Отметим некоторые общие закономерности в пространстве дискретизаций дифференцируемых функций. Пусть  $y_{N+1}^{(p+1)}(h)$  — пространство дискретизаций  $(p + 1)$  раз дифференцируемой функции на равномерной сетке с ша-

гом  $h$ . Тогда в классе таких функций дискретный аналог формулы Тейлора, записанный для узла  $x_n$  дискретизации, представляется в виде

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{s=1}^p \frac{1}{s!} h^s y_n^{(s)} + O(h^{p+1}),$$

где  $O(h^{p+1})$  — остаточный член дискретизации. Аналогично записываются и другие типы конкретных дискретизаций.

**Определение 1.** В пространстве  $y_{N+1}^{(s)}(h)$  сеточных функций локальной ошибкой дискретизации функции  $y = y(x)$ , заданной в записи

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n; h; y_n^{(v)}, v = \overline{0, s}), \quad (4.1)$$

называется сеточная функция

$$\delta y_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n; h; y_n^{(v)}, v = \overline{0, s}). \quad (4.2)$$

**Определение 2.** Дискретизация (4.1) функции  $y(x)$  называется согласованной с функцией  $y(x)$  с порядком  $s$ , если

$$\max_{\omega} (\delta y_{n+1}) = O(h^{s+1}) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

**Определение 3.** Сеточная функция для дискретизации (4.1) функции  $y = y(x)$

$$\Theta_s(x_n; h; y_n^{(v)}, v = \overline{0, s+1}) = h^{s+1} \Phi(x_n; y_n^{(v)}, v = \overline{0, s+1}),$$

определенная на сетке  $\omega$ , называется главным членом локальной ошибки дискретизации (4.1), если на сетке  $\omega$  асимптотическое разложение остаточного члена дискретизации  $s$ -го порядка может быть представлено в виде

$$\delta y_{n+1} = h^{s+1} \varphi(x_n, y_n^{(v)}, v = \overline{0, s+1}) + O(h^{s+2}),$$

где  $\varphi(x_n; y_n^{(v)}, v = \overline{0, s+1})$  не зависит от шага  $h$ .

Аналогично, сеточная функция  $\varepsilon_n = y(x) - y_n$  называется глобальной ошибкой дискретизации (4.1) в точке  $x_n$  порядка  $s$ , если при  $h \rightarrow 0$   $\max_{\omega} (\varepsilon_n) = O(h^s)$ . В этом случае также считают, что дискретизация (4.1) является сходящейся к дифференцируемой функции  $y = y(x)$  с порядком  $s$ .

Исследование дискретизаций вида (4.1) на устойчивость состоит в изучении их применимости к аппроксимации экспоненциальной функции  $y = e^{-\lambda x}$  [ $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ], которая является решением дифференциального уравнения

$$y' = -\lambda y \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0). \quad (4.3)$$

В результате приходим к равенству

$$y_{n+1} = D_{[s]}(z) y_n \quad |z = \lambda h|, \quad (4.4)$$

из которого определяется функция  $D_{[s]}(z)$ , называемая операторной функцией дискретизации (4.1).

В зависимости от качества аппроксимации операторной функцией  $D_{[s]}(z)$  экспоненциальной функции  $y = e^{-\lambda x} | \operatorname{Re} \lambda > 0 |$  различают разные типы устойчивости дискретизаций (4.1).

**Определение 4.** Дискретизации (4.1) называются  $A$ -устойчивыми, если их операторные функции  $D_{[s]}(z)$  удовлетворяют следующим условиям  $A$ -допустимости:

а) для  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0 \quad |D_{[s]}(z)| \leq 1;$

б)  $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty} D_{[s]}(z) = 1.$

**Определение 5..** Дискретизации (4.1) называются  $L$ -устойчивыми, если их операторные функции  $D_{[s]}(z)$  удовлетворяют следующим условиям  $L$ -допустимости:

а) для  $\operatorname{Re} z \geq 0 \quad |D_{[s]}(z)| \leq 1,$

б)  $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty} D_{[s]}(z) = 0.$

**Определение 6.** Дискретизации (4.1) называются  $A_0$ -устойчивыми, если их операторные функции  $D_{[s]}(z)$  удовлетворяют следующим условиям  $A_0$ -допустимости:

а) для  $z \geq 0 \quad |D_{[s]}(z)| \leq 1;$

б)  $\lim_{z \rightarrow \infty} D_{[s]}(z) = 1.$

**Определение 7.** Дискретизации (4.1) называются  $L_0$ -устойчивыми, если их операторные функции  $D_{[s]}(z)$  удовлетворяют следующим условиям  $L_0$ -допустимости:

а) для  $z \geq 0 \quad |D_{[s]}(z)| \leq 1;$

б)  $\lim_{z \rightarrow \infty} D_{[s]}(z) = 0.$

Различают и другие типы устойчивости дискретизаций (4.1). Среди них можно отметить жестко устойчивые дискретизации. Они характеризуются тем, что их области устойчивости не содержат некоторых подобластей, примыкающих к мнимой оси в правой полуплоскости комплексного переменного.

Дискретизации (4.1) определенного порядка точности  $s$  используются в качестве численных методов, если указан дополнительный алгоритм определения численных значений входящих производных непосредственно по дифференциальному уравнению, для решения которого они предназначены. Поэтому все введенные выше понятия распространяются на численные методы решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad (4.5)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (4.6)$$

где функция  $f(x, y)$  предполагается:

а) дифференцируемой требуемое число раз по  $x$  и по  $y$  в полосе  $D = \{x_0 \leq x < X, |y| < \infty\};$

б) удовлетворяющей в полосе  $D$  условию Липшица  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$  ( $L$  — константа Липшица).

В этом случае задача (4.5), (4.6) в полосе  $D$  имеет единственное решение. Ее линейной моделью может служить следующая задача Коши:

$$y' = -\lambda y, \quad (4.7)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (4.8)$$

где  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Точным аналитическим решением задачи (4.7), (4.8) является функция

$$y(x) = y_0 e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (4.9)$$

Аналогично рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (4.5). В качестве примера приведем систему, возникающую при моделировании двухполосника [26]:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,28 \cdot 10^7 & -1,792 \cdot 10^7 \\ 990 & -43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,613 \cdot 10^7 \\ 9,009 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Ее можно в общем виде записать так:

$$\bar{y}' = A\bar{y} + B\bar{u}. \quad (4.10)$$

Если в уравнении (4.10) исследовать свойства матрицы  $A$ , то оказывается, что ее элементы существенно отличаются порядком величин. Более того, уравнение

$$\det(\lambda E - A) = 0 \quad (4.11)$$

имеет решение  $\lambda_1 = -6,28 \cdot 10^7$  и  $\lambda_2 = -3,26 \cdot 10^2$  т. е.  $k = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \approx 2000000$ .

Оказывается, что математические модели реальных процессов и явлений во многих случаях описываются системами уравнений вида (4.10) или аналогичными им нелинейными системами, для которых собственные числа имеют сравнительно большой коэффициент разброса. Оказывается, что для решения таких задач классические численные методы непригодны, так как в этих случаях константа Липшица намного больше единицы и, следовательно, можно достичь максимального шага интегрирования не больше  $1/k$  в приведенном выше соотношении. В противном случае погрешности на последнем шаге и накопленные на предыдущих шагах приводят к нарушению вычислительного процесса. Для решения этих типов задач необходимы такие численные методы, чтобы их полная ошибка не возрастала, а, наоборот, уменьшалась со временем. Это требование представляет собой некоторую характеристику численной устойчивости методов. Численные методы, которым не свойственна такая особенность, называются численно неустойчивыми. Очевидно, что даже при небольшой ошибке при использовании неустойчивых численных методов ошибка через определенное число шагов достигает такого значения, что получаемое этими методами решение становится бессмысленным.

Чтобы лучше понять возникшую ситуацию, рассмотрим следующие численные методы:

явный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (4.12)$$

неявный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad (4.13)$$

метод трапеций

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]. \quad (4.14)$$

Применив эти численные методы к решению модельного уравнения (4.3), получим такие решения:

для явного метода Эйлера

$$y_{n+1} = (1 - z) y_n, \quad (4.15)$$

для неявного метода Эйлера

$$y_{n+1} = \frac{1}{1+z} y_n, \quad (4.16)$$

для метода трапеций

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2} z}{1 + \frac{1}{2} z} y_n, \quad (4.17)$$

где  $z = \lambda h$ .

Очевидно, что явный метод Эйлера при большом шаге неустойчив, так как при  $|1 - \lambda h| > 1$  переменная  $y_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для явного метода Эйлера условие устойчивости состоит в выполнении требования, чтобы  $|1 - z| < 1$ , т. е.  $0 < |z| < 2$  или

$$h < \frac{2}{|\lambda|}. \quad (4.18)$$

Если, например,  $|\lambda| = 10^5$ , то  $h_{\max} < 2 \cdot 10^{-5}$ . Наоборот, численные методы (4.13), (4.14) являются устойчивыми, так как

$$\left| \frac{1}{1+z} \right| < 1 \text{ и } \left| \frac{1 - \frac{1}{2} z}{1 + \frac{1}{2} z} \right| < 1$$

при любых  $\operatorname{Re} z > 0$ , т. е. для этих численных методов  $y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  независимо от значения  $h$ . Следовательно, неявный метод Эйлера и метод трапеций являются численно устойчивыми. Более того, неявный метод Эйлера обладает свойством  $L$ -устойчивости, а метод трапеций — свойством  $A$ -устойчивости. Среди различных типов и подтипов устойчивости численных методов решения жестких задач наиболее существенны понятия  $A$ -,  $L$ - и жесткой устойчивости.

Если численные методы (4.12), (4.13) применить к решению систе-



мы уравнений

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}),$$

то получим (используя явный метод Эйлера)

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h\bar{f}(x_n, \bar{y}_n), \quad (4.19)$$

неявный метод Эйлера —

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h\bar{f}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}), \quad (4.20)$$

метод трапеций —

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{1}{2} [\bar{f}(x_n, \bar{y}_n) + \bar{f}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]. \quad (4.21)$$

Применим эти методы к решению модельной системы уравнений вида

$$\bar{y}' = A\bar{y}. \quad (4.22)$$

После упрощений получим такие выражения:

для явного метода Эйлера

$$\bar{y}_{n+1} = (E + hA) \bar{y}_n, \quad (4.23)$$

для неявного метода Эйлера

$$y_{n+1} = (E - hA)^{-1} \bar{y}_n, \quad (4.24)$$

для метода трапеций

$$\bar{y}_{n+1} = \left(E - \frac{1}{2} A\right)^{-1} \left(E + \frac{1}{2} A\right) \bar{y}_n. \quad (4.25)$$

Отсюда следует, что явные численные методы реализуются без обращений матриц типа Якоби решаемых систем уравнений, а неявные, наоборот, с обращениями таких матриц.

Наиболее распространенными в теории численных методов, в которых используются обращения матриц типа Якоби, являются следующие подходы:

а) на базе реализаций неявных методов Гира или аналогичных им с применением различных приемов обращения возникающих при этом матриц типа Якоби;

б) на базе различных представлений матричной экспоненты с последующим использованием различных приемов обращения возникающих при этом матриц типа Якоби;

в) на базе методов Розенброка и им аналогичных, с использованием обращения к правой части в неявном виде с последующей реализацией обращений возникающих при этом матриц типа Якоби;

г) на базе квазиньютоновских приближений с последующим итерационным приближением возникающих при этом матриц типа Якоби.

Наиболее известными из численных методов, в которых используются обращения матриц типа Якоби, являются методы Гира, реализованные в известных программах STIFF, EPISODE, DIFSUB и др. Из этих программ наиболее эффективны STIFF, EPISODE. Областями их применения являются мягкие, жесткие и жестко

осциллирующие задачи [3]. К недостаткам следует отнести: а) сложность реализации обращения матриц типа Якоби большой размерности; б) зависимость эффективности от степени жесткости решаемых задач и практическая неприменимость при больших жесткостях; в) потерю точности при вычислениях на точностях до  $10^3$  с помощью методов Гира первого — шестого порядков точности и др. Наиболее надежной следует считать программу STIFF, которая применима для большого диапазона жестких задач. Основными недостатками всех численных методов с использованием обращения матриц типа Якоби является их неэффективность при жесткостях, превышающих  $10^{12}$ — $10^{14}$ . В этих случаях за счет плохой обусловленности матриц типа Якоби наблюдается измельчение шага интегрирования с постепенным убыванием его до нуля. Отметим, что в общем достаточно сложно адаптировать программы STIFF и EPISODE для малых ЭВМ типа СМ, ИСКРА и др. Наконец, потеря точности на промежутке интегрирования приводит к ненадежным результатам при решении сложных прикладных задач. Поэтому исследования в этой области интенсивно продолжаются.

**Численные методы с использованием обращения матриц типа Якоби.** В общем виде методы Гира порядка точности  $k$  можно записать в виде

$$y_{n+1} = a_0(k) y_n + a_1(k) y_{n-1} + a_2(k) y_{n-2} + \dots + a_{k-1}(k) y_{n-k+1} + h[b_{-1}(k) f(x_{n+1}, y_{n+1})], \quad (4.26)$$

где коэффициенты  $a_i(k)$  следует определить (зависимость их от  $k$  видна из (4.26)). Для определения этих коэффициентов используется уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \dots & (k-1) & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & (k-1)^2 & 2 \\ 0 & -1 & -8 & 9 & \dots & [-(k-1)]^3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^k & (-2)^k & (-3)^k & \dots & [-(k-1)]^k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \\ a_2(k) \\ a_3(k) \\ \dots \\ b_{-1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

На основании уравнения (4.27) методы Гира первого — шестого порядков задаются соответственно следующими расчетными формулами:

- 1)  $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ ,
- 2)  $y_{n+1} = \frac{4}{3} y_n - \frac{1}{3} y_{n-1} + \frac{2}{3} hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ ,

$$3) y_{n+1} = \frac{18}{11} y_n - \frac{9}{11} y_{n-1} - \frac{2}{11} y_{n-2} + \frac{16}{11} hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$4) y_{n+1} = \frac{48}{25} y_n - \frac{36}{25} y_{n-1} + \frac{16}{25} y_{n-2} - \frac{3}{25} y_{n-3} + \frac{12}{25} hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$5) y_{n+1} = \frac{300}{137} y_n - \frac{300}{137} y_{n-1} + \frac{200}{137} y_{n-2} - \frac{75}{137} y_{n-3} + \frac{12}{137} y_{n-4} + \frac{60}{137} hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$6) y_{n+1} = \frac{360}{147} y_n - \frac{450}{147} y_{n-1} + \frac{400}{147} y_{n-2} - \frac{225}{147} y_{n-3} + \frac{72}{147} y_{n-4} - \frac{10}{147} y_{n-5} + \frac{60}{147} hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Для решения систем уравнений

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \quad (4.28)$$

метод Гира  $k$ -го порядка можно записать в виде

$$\bar{y}_{n+1} - hb_{-1}\bar{f}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) - \sum_{i=0}^{k-1} (a_i \bar{y}_{n-i}) = 0, \quad (4.29)$$

тогда его реализация с помощью метода Ньютона имеет вид

$$\bar{y}_{n+1}^{(j+1)} = \bar{y}_{n+1}^{(j)} - [E - hb_{-1}I_f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(j)})]^{-1} \left\{ \bar{y}_{n+1}^{(j)} - hb_{-1}\bar{f}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(j)}) - \sum_{i=0}^{k-1} (a_i \bar{y}_{n-i}^{(j)}) \right\}, \quad (4.30)$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ ,  $I_f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(j)})$  — матрица Якоби функции  $\bar{f}(x, \bar{y})$ , вычисленная в точках  $x_{n+1}$  и  $\bar{y}_{n+1}^{(j)}$ . Указанный выше подход используется во всех численных методах, в которых используются обращения матриц типа Якоби.

Конечно, численный метод в записи (4.30) упрощают и для организации процедуры выбора переменного шага интегрирования используют представление с помощью векторов Нордсика [123]. Действительно, если применим обозначение

$$\bar{d}_{n+1}^{(j)} = h\bar{f}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(j-1)}) + hI_f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(j-1)})[\bar{y}_{n+1}^{(j)} - \bar{y}_{n+1}^{(j-1)}], \quad (4.31)$$

то (4.30) получаем в виде

$$\bar{y}_{n+1}^{(j+1)} = \bar{y}_{n+1}^{(j)} + b_{-1} [E - hb_{-1}I_f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(j)})]^{-1} [h\bar{y}_{n+1}^{(j)} - \bar{d}_{n+1}^{(j)}]. \quad (4.32)$$

После несложных преобразований [123] приходим окончательно к выражению

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1}^{(j+1)} &= \bar{y}_{n+1}^{(0)} + b_{-1} [E - hb_{-1}I_f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(0)})]^{-1} \times \\ &\times \left[ h\bar{y}_{n+1}^{(0)} - \left( \frac{\bar{y}_{n+1}^{(0)}}{b_{-1}} - \frac{1}{b_{-1}} \sum_{i=0}^{k-1} (a_i \bar{y}_{n-i}^{(0)}) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

которое позволяет реализовать итерационный процесс в (4.32). Если сопоставим выражения (4.32) и (4.33), то получим

$$\bar{d}_{n+1}^{(0)} = \frac{1}{b_{-1}} \bar{y}_{n+1}^{(0)} - \frac{1}{b_{-1}} \sum_{i=0}^{k-1} (a_i \bar{y}_{n-i}^{(0)}), \quad (4.34)$$

или

$$\bar{d}_{n+1}^{(0)} = \frac{1}{b_{-1}} \left\{ \bar{y}_{n+1}^{(0)} - \sum_{i=0}^{k-1} (a_i \bar{y}_{n-i}^{(0)}) \right\}. \quad (4.35)$$

Представим (4.31) в виде

$$d_{n+1}^{(j+1)} = d_{n+1}^{(j)} + (E - hb_{-1}I_f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(j)})^{-1} [h\bar{y}_{n+1}^{(j)} - \bar{d}_{n+1}^{(j)}], \quad (4.36)$$

тогда, используя (4.35), получаем формулу для рекуррентных вычислений (4.36). Так как  $\bar{f}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(0)}) = \bar{y}_{n+1}^{(0)}$ ,

$$\bar{d}_{n+1}^{(0)} = h\bar{y}_{n+1}^{(0)}, \quad (4.37)$$

т. е. можно интерпретировать  $\bar{d}_{n+1}^{(0)}$  как прогноз для  $h\bar{y}_{n+1}$ .

Используя векторы Нордсика  $\bar{z}_n$ , имеем такие канонические представления:

прогноза

$$\bar{z}_{n+1}^{(0)} = Z\bar{z}_n, \quad (4.38)$$

коррекции

$$\bar{z}_{n+1}^{(j+1)} = \bar{z}_{n+1}^{(j)} + F_z(\bar{z}_{n+1}^{(j)})C_z, \quad (4.39)$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots, M-1$ .

Учитывая, что вектор Нордсика существенно зависит от  $t = t_{n+1}$ , применим для его представления разложение в ряд Тейлора. Тогда в качестве уравнения коррекций получаем уравнение, построенное на треугольнике Паскаля:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{n+1}^{(0)} \\ h\bar{y}_{n+1}^{(0)} \\ \frac{1}{2} h^2 \bar{y}_{n+1}^{(0)} \\ \frac{1}{3!} h^3 \bar{y}_{n+1}^{(0)} \\ \dots \\ \frac{1}{k!} h^k \bar{y}_{n+1}^{(0)} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_{n+1}^{(0)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \frac{k(k+1)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_Z \underbrace{\begin{bmatrix} y_n \\ h\bar{y}_n' \\ \frac{1}{2} h^2 \bar{y}_n'' \\ \frac{1}{6} h^3 \bar{y}_n''' \\ \dots \\ \frac{1}{k!} h^k \bar{y}_n^{(k)} \end{bmatrix}}_{\bar{z}_n}. \quad (4.40)$$

**Явные численные методы.** При решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений главным является подавление накопленных от шага к шагу погрешностей получаемых численных значений решения и его производных. Например, при решении модельного уравнения

$$y' = -\lambda y, \quad (4.41)$$

где  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  и  $|\lambda| \gg 1$ , накопление погрешностей счета можно характеризовать следующим образом. Пусть на  $n$ -м шаге интегрирования значение решения  $\tilde{y}_n$  получено с погрешностью  $\varepsilon$ , т. е.  $\tilde{y}_n = y_n + \varepsilon$ , где  $y_n$  — значение точного решения в этом узле. Тогда, определяя по уравнению (4.41) соответствующее значение производной в этом узле, находим, что

$$\tilde{y}'_n = -\lambda \tilde{y}_n = -\lambda y_n - \lambda \varepsilon = y'_n - \lambda \varepsilon,$$

где  $\lambda \varepsilon$  — погрешность этого способа нахождения численного значения первой производной решения. Так как  $|\lambda| \gg 1$ , то, например, при  $|\lambda| = 10^8$  и  $|\varepsilon| = 10^{-4}$ , получаем  $|\lambda \varepsilon| = 10^4$ . При наличии такой погрешности не всегда можно надеяться на положительный результат счета в последующем  $x_{n+1}$ -м узле интегрирования.

Рассмотрим еще один пример, который будем в дальнейшем именовать тестом № 1. Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} y'_1 = -c_1 y_1 - (c_1 - 1) y_2, \\ y'_2 = (c_1 - 1) y_1 - c_1 y_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

при начальных условиях

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1. \quad (4.43)$$

Точное решение этой задачи

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-(2c_1-1)x}, \\ y_2(x) &= -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-(2c_1-1)x}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Собственные значения матрицы системы (4.42) следующие:  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = -(2c_1 - 1)$ , т. е. жесткость определяется числом  $k = 2c_1 - 1$ , где  $c_1 > 0$ .

Для теста № 1, рассматриваемого далее, при  $c_1 > 10^{12}$  неэффективными являются численные методы с использованием обращения матриц типа Якоби: постепенно уменьшается шаг интегрирования и возможен переход на постоянный шаг интегрирования. Это — следствие плохой обусловленности матриц типа Якоби. Поэтому численные методы, предназначенные для решения жестких систем должны, наоборот, обладать свойствами, устраняющими эти недостатки. Таким образом, за счет плохой обусловленности матриц типа Якоби при больших степенях жесткости системы уравнений численные методы с использованием обращения таких матриц неприменимы для решения жестких задач с большими степенями жесткости. Предлагаемые

ниже численные методы надежно работают и в указанных выше условиях.

Рассмотрим сначала простейшие из таких вычислительных процедур — явные одношаговые дробно-рациональные численные методы решения жестких дифференциальных уравнений. Отметим, что излагаемые ниже методы легко распространяются на системы уравнений покомпонентно либо с помощью итерационных процедур типа Зейделя.

Пусть рассматривается решение задачи Коши

$$y' = f(y), \quad (4.45)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (4.46)$$

где функция  $f(y)$  предполагается в полосе  $D$ :

$$D = \{x_0 \leq x \leq X; |y| < \infty\};$$

а) непрерывно дифференцируемой требуемое число раз по  $y$

б)  $\frac{df}{dy} < 0$ ;

в) удовлетворяющей условию Липшица.

При этом  $\left| \frac{df}{dy} \right| < L$  для любого  $y \in (-\infty, +\infty)$ .

Кроме того, предполагается, что задача Коши (4.45), (4.46) в полосе  $D$  имеет единственное решение.

Пусть в узле  $x_n$  заданы величины

$$k_1 = hf(y_n) \quad \text{и} \quad k_2 = hf\left(y_n + \frac{3}{4}k_1\right). \quad (4.47)$$

Рассмотрим явный одношаговый численный метод

$$y_{n+1} = y_n + u_{[1]}(y_n), \quad (4.48)$$

где

$$u_{[1]}(y_n) = \frac{k_1^2}{2k_1 - k_2}. \quad (4.49)$$

Существует следующая теорема.

**Теорема 4.1.** Если в уравнении (4.45) функция  $f(y)$  удовлетворяет условиям а — в, то численный метод (4.48) является А-устойчивым и согласованным с первым порядком точности.

**Доказательство.** Очевидно, что

$$k_1 = hf, \quad (4.50)$$

$$k_2 = hf + \frac{3}{4}h^2f \frac{df}{dy} + \frac{9}{32}h^3f^2 \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{9}{128}h^4f^3 \frac{d^3f}{dy^3} + O(h^5), \quad (4.51)$$

поэтому

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{[T]} - y_{n+1} &= y_n + hf - y_{n+1} = \\ &= hf - \frac{k_1^2}{2k_1 - k_2} = \frac{\frac{3}{4}h^2 \left[ f \frac{df}{dy} + \frac{3}{8}hf^2 \frac{d^2f}{dy^2} + O(h^3) \right]}{1 - \frac{3}{4}h \frac{df}{dy} - \frac{9}{32}h^2f \frac{d^2f}{dy^2} + O(h^3)} = O(h^2) \end{aligned}$$

при условии, что в рассматриваемом узле интегрирования

$$\left| 1 - \frac{3}{4} h \frac{df}{dy} - \frac{9}{32} h^2 f \frac{d^2 f}{dy^2} + O(h^3) \right| = O(h).$$

Заметим, что выполнения этого условия всегда можно добиться при достаточно малом  $h$ . Этим доказана согласованность численного метода с первым порядком точности.

Применим численный метод (4.48) к решению модельного уравнения (4.41). Если ввести обозначение  $h = -z$ , то

$$k_1 = -zy_n, \quad (4.52)$$

$$k_2 = \left( -z + \frac{3}{4} z^2 \right) y_n. \quad (4.53)$$

А уравнение (4.45) принимает вид

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{4} z}{1 + \frac{3}{4} z} y_n,$$

т. е.

$$D_{[1]}(z) = \frac{1 - \frac{1}{4} z}{1 + \frac{3}{4} z}. \quad (4.54)$$

Отсюда следует  $A$ -устойчивость численного метода (4.48). Теорема доказана.

Далее, пусть заданы величины (4.47) и на их основе построен численный метод

$$y_{n+1} = y_n + u_{[2]}(y_n), \quad (4.55)$$

где

$$u_{[2]}(y_n) = \frac{k_1^2}{k_1 + \frac{2}{3}(k_1 - k_2)}. \quad (4.56)$$

Тогда существует следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Если выполнены условия теоремы 4.1, то численный метод (4.55) является  $A$ -устойчивым и согласованным со вторым порядком точности.

**Доказательство.** Отметим, что линейное приближение решения задачи (4.45), (4.46) представляется в виде

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + hf + \frac{1}{2} h^2 f \frac{df}{dy}.$$

На основании изложенного ранее получаем соотношения

$$\frac{2}{3}(k_1 - k_2) = hf \left[ -\frac{1}{2} h \frac{df}{dy} - \frac{3}{16} h^2 f \frac{d^2 f}{dy^2} - O(h^3) \right],$$

$$\frac{k_1}{k_1 + \frac{2}{3}(k_1 - k_2)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} h \frac{df}{dy} - \frac{3}{16} h^2 f \frac{d^2 f}{dy^2} - O(h^3)}.$$

Отсюда находим, что

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{[2]} = \frac{\frac{1}{4} h^3 \left[ f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \frac{3}{4} f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + O(h) \right]}{1 - \frac{1}{2} h \frac{df}{dy} - \frac{3}{16} h^2 f \frac{d^2 f}{dy^2} - O(h^3)},$$

т. е.  $y_{n+1} - y_{n+1}^{[2]} = O(h^3)$  при условии, что в рассматриваемом узле интегрирования

$$\left| 1 - \frac{1}{2} h \frac{df}{dy} - \frac{3}{16} h^2 f \frac{d^2 f}{dy^2} - O(h^3) \right| > O(h).$$

Если это условие не выполняется в некоторых узлах интегрирования, то в них рекомендуется использовать линейные численные методы второго порядка, либо в качестве приближенного решения принимать его значение в предыдущем узле интегрирования.

Используя (4.52), (4.53), нетрудно показать, что для численного метода (4.55)

$$y_{n+1} = y_n \frac{1 - \frac{1}{2} z}{1 + \frac{1}{2} z},$$

т. е.

$$D_{[2]}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} z}{1 + \frac{1}{2} z}. \quad (4.57)$$

Это свидетельствует о его  $A$ -устойчивости. Теорема доказана.

Пусть, далее, в узле  $x_n$  заданы величины

$$k_3 = hf \left( y_n - \frac{2}{3} k_1 \right), \quad (4.58)$$

$$k_4 = hf \left( y_n + \frac{3}{4} v_3 \right), \quad (4.59)$$

$$k_5 = hf \left[ y_n + \frac{1}{10} k_1 + \frac{1}{2} (v_3 - v_4) \right], \quad (4.60)$$

где

$$v_3 = \frac{1}{12} (7k_1 + 5k_3). \quad (4.61)$$

Рассмотрим следующий метод:

$$y_{n+1} = y_n + u_{[3]}(y_n), \quad (4.62)$$

где

$$u_{[3]}(y_n) = \frac{v_3^2}{v_3 + \omega_3}, \quad (4.63)$$

$$\omega_3 = \frac{4}{27} [4(k_1 - k_4) + 3(k_3 - k_5)]. \quad (4.64)$$

Справедлива следующая теорема.



**Теорема 4.3.** Пусть выполнены условия теоремы 4.1, тогда численный метод (4.62) является  $L$ -устойчивым и сохраняет третий порядок согласованности по точности.

**Доказательство.** Используя формулу Тейлора, получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 k_3 &= hf \left( y_n - \frac{2}{5} k_1 \right) = \\
 &= hf - \frac{2}{3} h^2 f \frac{df}{dy} + \frac{2}{25} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{4}{375} h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} + O(h^5), \\
 v_3 &= \frac{1}{12} (7k_1 - 5k_3) = \\
 &= hf - \frac{1}{6} h^2 f \frac{df}{dy} + \frac{1}{30} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{1}{225} h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} + O(h^5), \\
 k_4 &= hf \left( y_n + \frac{3}{4} v_3 \right) = hf + \frac{3}{4} h^2 f \frac{df}{dy} + \frac{9}{32} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - \\
 &- \frac{1}{8} h^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \frac{9}{128} h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} - \frac{11}{110} h^4 f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + O(h^5), \\
 k_5 &= hf \left[ y_n + \frac{1}{10} k_1 + \frac{1}{2} (v_3 - k_4) \right] = \\
 &= hf + \frac{1}{10} h^2 f \frac{df}{dy} - \frac{11}{24} h^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \frac{1}{200} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \\
 &+ \frac{1}{6000} h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} - \frac{163}{960} h^4 f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{16} h^4 f \left( \frac{df}{dy} \right)^3 + O(h^5), \\
 v_3 + \omega_3 &= hf - \frac{5}{6} h^2 f \frac{df}{dy} - \frac{1}{10} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{5}{18} h^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + O(h^4).
 \end{aligned}$$

Так как линейное приближение решения задачи Коши (4.45), (4.46) третьего порядка точности представляется в виде

$$y_{n+1}^{[3]} = y_n + hf + \frac{1}{2} h^2 f \frac{df}{dy} + \frac{1}{6} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{6} h^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2,$$

то условие согласованности численного метода (4.62) по порядку точности определяется выражением

$$y_{n+1}^{[2]} - y_{n+1} = \frac{c_4 h^4}{1 - \frac{5}{6} h \frac{df}{dy} - \frac{1}{10} h^2 f \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{5}{18} h^2 \left( \frac{df}{dy} \right)^2} + O(h^3)$$

при условии, что в рассматриваемом узле интегрирования

$$\left| 1 - \frac{5}{6} h \frac{df}{dy} - \frac{1}{10} h^2 f \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{5}{18} h^2 \left( \frac{df}{dy} \right)^2 \right| = O.$$

Здесь  $c_4$  — фиксированная константа.

Если для модельного уравнения (4.41)

$$k_3 = y_n \left( -z - \frac{2}{5} z^2 \right), \quad v_3 = y_n \left( -z - \frac{1}{6} z^2 \right),$$

$$k_4 = y_n \left( -z + \frac{3}{4} z^2 - \frac{1}{8} z^3 \right), \quad k_5 = y_n \left( -z + \frac{1}{10} z^2 + \frac{11}{24} z^3 + \frac{1}{16} z^4 \right),$$

то на основании (4.62) и (4.63) имеем

$$y_{n+1} = y_n - \frac{z + \frac{1}{6} z^2}{1 + \frac{2}{3} z + \frac{1}{6} z^2} y_n,$$

т. е.

$$D_{[3]}(z) = \frac{1 - \frac{1}{3} z}{1 + \frac{2}{3} z + \frac{1}{6} z^2}.$$

Полученная операторная функция  $L$ -допустима, поэтому численный метод (4.62) является  $L$ -устойчивым. Теорема доказана.

Аналогично строятся численные методы высших порядков точности. Важным свойством построенных численных методов является их вложенность.

**Итерационные методы первого — третьего порядков точности.** Рассмотрим численные методы первого — третьего порядков точности в сочетании с итерациями, образованными с помощью цепных дробей. Общий вид такого типа итерационных численных методов следующий:

$$y_{n+1,m+1}^{[k]} = y_{n+1,m}^{[k]} + \frac{v_k + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]})}{1 + \frac{\omega_k}{v_k + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]})}}, \quad (4.65)$$

где  $k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) — порядок точности численных методов;  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) — итерационный индекс;  $y_{n+1,0}^{[k]} = y_n$  ( $k = \overline{1, 3}$ ); величины  $v_k$  и  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) определяются соответственно выражениями:

$$а) \quad v_1 = k_1, \quad \omega_1 = k_1 - k_2, \quad (4.66)$$

$$б) \quad v_2 = k_1, \quad \omega_2 = \frac{2}{3} (k_1 - k_2), \quad (4.67)$$

$$в) \quad v_3 = \frac{1}{12} (7k_1 + 5k_3), \quad (4.68)$$

$$\omega_3 = \frac{4}{27} [4(k_1 - k_4)]. \quad (4.69)$$

**Теорема 4.4.** Если выполнены условия теоремы 4.1, то итерационный процесс в численных методах (4.65) — (4.69) при любом фиксированном шаге интегрирования обладает сублинейной скоростью сходимости.

**Доказательство.** Если ввести вспомогательное обозначение

$$z_m^{[k]} = v_k + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]}), \quad (4.70)$$

то

$$z_{m+1}^{[k]} = z_m^{[k]} + (y_{n+1,m}^{[k]} - y_{n+1,m+1}^{[k]}) = z_m^{[k]} - \frac{z_m^{[k]}}{1 + \frac{\omega_k}{z_m^{[k]}}} = \frac{\omega_k}{1 + \frac{\omega_k}{z_m^{[k]}}},$$

т. е.

$$z_{m+1}^{[k]} = \frac{\omega_k}{1 + \frac{\omega_k}{z_m^{[k]}}}. \quad (4.71)$$

Соотношение (4.71) в эквивалентной форме записи имеет вид

$$1 + \frac{\omega_k}{z_m^{[k]}} = \frac{\omega_k}{z_{m+1}^{[k]}}. \quad (4.72)$$

Если ввести вспомогательное обозначение

$$u_m^{[k]} = \frac{\omega_k}{z_m^{[k]}}, \quad (4.73)$$

то равенство (4.72) преобразуется в разностное уравнение

$$u_{m+1}^{[k]} = u_m^{[k]} + 1,$$

решение которого представляется в виде

$$u_{m+1}^{[k]} = u_0^{[k]} + (m + 1)$$

или, с учетом начального значения,  $u_0^{[k]} = \omega_k k_k^{-1}$ ,

$$u_{m+1}^{[k]} = (m + 1) + \frac{\omega_k}{v_k}. \quad (4.74)$$

Учитывая (4.70) и (4.73), имеем

$$z_{m+1}^{[k]} = \frac{\omega_k}{(m + 1) + \frac{\omega_k}{v_k}},$$

$$z_m^{[k]} = \frac{\omega_k}{m + \frac{\omega_k}{v_k}},$$

т. е.

$$y_{n+1,m+1}^{[k]} - y_{n+1,m}^{[k]} = \frac{\omega_k}{\left(m + \frac{\omega_k}{v_k}\right) \left(m + 1 + \frac{\omega_k}{v_k}\right)},$$

откуда на основании условий теоремы следует оценка

$$|y_{n+1,m+1}^{[k]} - y_{n+1,m}^{[k]}| \leq \frac{|\omega_k|}{m(m+1)}.$$

Последнее соотношение и свидетельствует о сублинейной скорости сходимости итераций в численных методах (4.65) — (4.69). Теорема доказана.

**Замечание.** Если предполагать, что в рассматриваемом узле интегрирования

$$\left| 1 + \frac{\omega_k}{v_k + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]})} \right| \neq 0,$$

то на любой итерации  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) численные методы (4.65) — (4.69) сохраняют начальный порядок согласованности по точности.

Исследуем указанные численные методы на устойчивость. Применяя их к решению модельного уравнения (4.41), на основании изложенного ранее получаем, что

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{3}{4} z^2 y_n, & v_1 &= -z y_n, & \frac{\omega_1}{v_1} &= \frac{3}{4} z; \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2} z^2 y_n, & v_2 &= -z y_n, & \frac{\omega_2}{v_2} &= \frac{1}{2} z; \\ \omega_3 &= -\frac{1}{3} z^2 \left(1 + \frac{1}{6} z\right) \left(2 + \frac{1}{2} z\right) y_n, & v_3 &= -z \left(1 + \frac{1}{6} z\right) y_n, \\ & & \frac{\omega_3}{v_3} &= \frac{2}{3} z + \frac{1}{6} z^2.\end{aligned}$$

Полагая  $y_{n+1,m}^{[k]} = D_{[k]m}(z) y_n$ , находим, что

$$\begin{aligned}D_{[1](m+1)}(z) &= D_{[1]m}(z) - \frac{\frac{3}{4} z^2}{\left(m+1 + \frac{3}{4} z\right) \left(m + \frac{3}{4} z\right)}, \\ D_{[2](m+1)}(z) &= D_{[2]m}(z) - \frac{\frac{1}{2} z^2}{\left(m+1 + \frac{1}{2} z\right) \left(m + \frac{1}{2} z\right)}, \\ D_{[3](m+1)}(z) &= D_{[3]m}(z) - \frac{\frac{1}{3} z^2 \left(1 + \frac{1}{6} z\right) \left(2 + \frac{1}{2} z\right)}{\left(m+1 + \frac{2}{3} z + \frac{1}{6} z^2\right) \left(m + \frac{2}{3} z + \frac{1}{6} z^2\right)}.\end{aligned}$$

Например, для численного метода второго порядка операторные функции имеют вид

$$\begin{aligned}D_{[2]1}(z) &= \frac{1 - \frac{1}{2} z}{1 + \frac{1}{2} z}, \\ D_{[2]2}(z) &= \frac{2 - \frac{1}{2} z - \frac{3}{4} z^2}{2 + \frac{3}{2} z + \frac{1}{4} z^2}, \\ D_{[2]3}(z) &= \frac{6 - 2z - 3z^2 - \frac{5}{8} z^3}{6 + 7z + \frac{9}{4} z^2 + \frac{1}{8} z^3}\end{aligned}$$

и т. д.

Нетрудно убедиться, что в любом из численных методов типа (4.65) соответствующий итерационный процесс является устойчивым. Опыт решения конкретных прикладных задач показывает, что при использовании этих методов требуется небольшое количество (5—7) итераций на каждом шаге интегрирования.

Численные методы (4.65) до третьего порядка включительно были реализованы на алгоритмическом языке БЭЙСИК в программном модуле ИДРК-В покомпонентно и применялись для решения мягких, жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неосциллирующими быстро решениями. Результаты численных экспериментов показали их эффективность и согласованность с выводами теоретического характера.

## § 5. Итерационные численные методы

Для построения одношаговых вложенных  $A$ -устойчивых приближений решения задачи Коши (4.45), (4.46) используются обозначения

$$k_1^{(y)} = hf(y_n), \quad k_2(y) = hf[y_n + c_2(y - y_n)],$$

$$k_3(y) = hf\left[y_n + c_3(y - y_n) + a_3 k_1 + \sum_{m=2}^{s-1} b_m k_m(y)\right] \quad s = 3, 4, \dots,$$

которые определяются по правой части уравнения (4.45). Для производных решения имеем соотношения

$$y' = f, \quad y'' = f \frac{df}{dy}, \quad y''' = f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + f \left( \frac{df}{dy} \right)^2,$$

$$y'''' = f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} + 4f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + f \left( \frac{df}{dy} \right)^3$$

и т. д., поэтому

$$y - y_n = hf + \frac{1}{2} h^2 f \frac{df}{dy} + \frac{1}{6} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{6} h^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{24} h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} + \frac{1}{6} h^4 f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{24} h^4 f \left( \frac{df}{dy} \right)^3 + O(h^5). \quad (5.1)$$

С помощью  $k_s(y)$  ( $s = 2, 3, 4, \dots$ ) неявные одношаговые приближения строятся в виде

$$y_{n+1}^{[k]} = y_n + \gamma_1 k_1 + \sum_{s=2}^k \gamma_s k_s(y), \quad (5.2)$$

где  $k$  — порядок точности приближений (5.2).

Неявные одношаговые приближенные методы первого порядка точности ищем в виде

$$y_{n+1}^{[1]} = y_n + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2(y_{n+1}), \quad (5.3)$$

где

$$k_2(y) = hf\left[y_n + \frac{3}{4}(y - y_n)\right]. \quad (5.4)$$

Очевидно, что

$$k_2(y) = hf + \frac{3}{4} h^2 f \frac{df}{dy} + \frac{9}{32} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{3}{8} h^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \\ + \frac{9}{128} h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} + \frac{13}{32} h^4 f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{8} h^4 f \left( \frac{df}{dy} \right)^3 + O(h^5). \quad (5.5)$$

Условие согласованности метода (5.3) с первым порядком точности записывается в виде уравнения

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1. \quad (5.6)$$

Это уравнение с двумя неизвестными. Поэтому можно прибавить еще одну связь между неизвестными, исходя из требования  $A$ -устойчивости приближенного метода (5.3). Если положим  $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_2 = 1$ , то получим, что

$$y_{n+1}^{[1]} = y_n + k_2(y_{n+1}), \quad (5.7)$$

или с учетом (5.5.) —

$$y_{n+1}^{[1]} = y_n + hf + \frac{3}{4} f \frac{df}{dy} + O(h^3).$$

Применяя (5.7) к решению модельного уравнения (4.41) и выполняя элементарные преобразования, находим, что его операторная функция имеет вид

$$D_{[1]}(z) = \frac{1 - \frac{1}{4} z}{1 + \frac{3}{4} z} \quad (5.8)$$

и обладает свойством  $A$ -допустимости.

Если же в уравнении (5.6) примем  $\gamma_1 = -1/3$  и  $\gamma_2 = 4/3$ , то приходим к неявному приближенному методу первого порядка

$$y_{n+1}^{[1]} = y_n + \frac{1}{3} [4k_2(y_{n+1}) - k_1], \quad (5.9)$$

который характеризуется  $L$ -допустимой операторной функцией

$$D_{[1]}(z) = \frac{1}{1+z}. \quad (5.10)$$

Таким образом, нами определено семейство неявных одношаговых приближенных методов первого порядка точности

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 k_1 + (1 - \gamma_1) k_2(y_{n+1}), \quad (5.11)$$

в которое входят методы, обладающие различными типами устойчивости.

Неявные одношаговые приближенные методы второго порядка точности будем также искать в виде (5.3). В этом случае условие их согласованности с методом второго порядка точности представляется в виде системы уравнений

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \frac{3}{4} \gamma_2 = \frac{1}{2}.$$

Эта система имеет единственное решение  $\gamma_1 = 1/3$  и  $\gamma_2 = 2/3$ , поэтому неявный приближенный метод второго порядка точности имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} [k_1 - 2k_2(y_{n+1})]. \quad (5.12)$$

Этот метод характеризуется локальной погрешностью

$$\frac{1}{4} h^3 \left[ \frac{3}{4} f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 \right]$$

и  $A$ -допустимой операторной функцией

$$D_{[2]}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z}{1 + \frac{1}{2}z}. \quad (5.13)$$

Неявные одношаговые приближенные методы третьего порядка точности ищем в виде

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2(y_{n+1}) + \gamma_3 k_3(y_{n+1}), \quad (5.14)$$

где

$$k_3(y) = hf[y_n + c_3(y - y_n) + a_3 k_2(y)], \quad (5.15)$$

а величины  $k_1$  и  $k_2(y)$  определяются соответственно соотношениями  $k_1 = hf(y_n)$  и (5.4). Очевидно, что

$$\begin{aligned} k_3(y) &= hf[y_n + c_3(y - y_n) + a_3 k_2(y)] = \\ &= hf + ah^2 f \frac{df}{dy} + \frac{1}{2} a^2 h^3 f^3 \frac{d^2 f}{dy^2} + bh^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} a^3 h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} + ch^4 f \left( \frac{df}{dy} \right)^3 + dh^4 f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + O(h^5). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Здесь

$$a = c_3 + a_3, \quad b = \frac{1}{2} \left( c_3 + \frac{3}{2} a_3 \right), \quad c = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} c_3 + \frac{3}{4} a_3 \right),$$

$$d = \frac{1}{2} c_3^2 + \frac{5}{2} c_3 a_3 + \frac{1}{2} a_3^2 + \frac{1}{6} c_3 + \frac{9}{32} a_3. \quad (5.17)$$

Условие согласованности метода (5.14) по третьему порядку точности задается в виде системы уравнений

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1, \quad \frac{3}{4} \gamma_2 + a\gamma_3 = \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{32} \gamma_2 + \frac{1}{2} a^2 \gamma_3 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{3}{8} \gamma_2 + b\gamma_3 = \frac{1}{6}. \quad (5.18)$$

Так как система уравнений (5.18) переопределена относительно неизвестных  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , для ее решения применим специальную процедуру. Сущность ее состоит в следующем. Считая значение  $a$  фиксированным параметром, из первых трех уравнений системы определяем

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2 - \gamma_3, \quad \gamma_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} a\gamma_3, \quad \gamma_3 = \frac{1}{6a(3-4a)}.$$

Тогда для каждого фиксированного значения параметра  $a$  определяются соответствующие константы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Далее, из последнего уравнения системы (5.18) определяем значение неизвестного  $b$ . Тогда из первых двух уравнений системы (5.17) определяем значения констант  $c_3$  и  $a_3$ . Для выбора из полученного семейства  $A$ -устойчивого приближенного метода определим его операторную функцию. Так как

$$k_3(y) = -\left[(1 - c_3)z - \frac{1}{4}a_3z^2\right]y_n - \left(c_3z - \frac{3}{4}a_3z^2\right)y, \quad (5.19)$$

операторная функция приближенного метода (5.14) имеет вид

$$D(z) = \frac{1 - z\left[\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2 + (1 - c_3)\gamma_3\right] + \frac{1}{4}a_3\gamma_3z^2}{1 + z\left(\frac{3}{4}\gamma_2 + c_3\gamma_3\right) - \frac{3}{4}a_3\gamma_3z^2}. \quad (5.20)$$

Отсюда следует, что условие  $A$ -устойчивости приближенного метода (5.14) требует выполнения неравенств

$$\frac{3}{4}\gamma_2 + c_3\gamma_3, \quad a_3\gamma_3 < 0.$$

Полагая  $a = 2/3$ , определим решение системы уравнений (5.18):

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{3}{4}, \quad c_3 = \frac{10}{9}, \quad a_3 = -\frac{4}{9},$$

которое удовлетворяет предыдущим неравенствам. В этом случае операторная функция (5.30) является  $A$ -допустимой, так как

$$D_{[3]}(z) = \frac{1 - \frac{5}{36}z - \frac{1}{12}z^2}{1 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{2}z^2}. \quad (5.21)$$

Следовательно, нами обоснован неявный одношаговый приближенный метод третьего порядка точности

$$y_{n+1}^{[3]} = y_n + \frac{1}{4}[k_1 + 3k_3(y_{n+1})], \quad (5.22)$$

где

$$k_3(y) = hf\left[y_n + \frac{10}{9}(y - y_n) - \frac{4}{9}k_2(y)\right], \quad (5.23)$$

причем на основании (5.16)

$$k_3(y) = hf + \frac{2}{3}h^2f\frac{df}{dy} + \frac{2}{9}h^3f^2\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{2}{9}h^3f\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \\ + \frac{4}{81}h^4f^3\frac{d^3f}{dy^3} + \frac{5}{24}h^4f^2\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{1}{54}h^4f\left(\frac{df}{dy}\right)^3 + O(h^5).$$

По этому же принципу строится неявный одношаговый приближенный метод четвертого порядка точности

$$y_{n+1}^{[4]} = y_n + \gamma_1k_1 + \gamma_5k_3(y_n) + \sum_{s=2}^4\gamma_sk_s(y_{n+1}), \quad (5.24)$$



где

$$k_4(y) = hf[y_n + c_n(y - y_n) + a_4k_1 + b_4k_2(y) + d_4k_3(y)],$$

$$k_3(y_n) = hf\left(y_n - \frac{4}{9}k_1\right).$$

Величины  $k_1$ ,  $k_2(y)$  и  $k_3(y)$  совпадают с определенными ранее. Очевидно, что

$$k_3(y_n) = hf - \frac{4}{9}h^2f \frac{df}{dy} + \frac{4}{81}h^3f^2 \frac{d^2f}{dy^2} - \frac{32}{729}h^2f^3 \frac{d^3f}{dy^3} + O(h^5),$$

$$k_4(y) = hf + ah^2f \frac{df}{dy} + \frac{1}{2}a^2f^2 \frac{d^2f}{dy^2} + bh^3f\left(\frac{df}{dy}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}a^3h^4f^3 \frac{d^3f}{dy^3} + ch^4f\left(\frac{df}{dy}\right)^3 + dh^4f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2f}{dy^2} + O(h^5).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$a = c_4 + a_4 + b_4 + d_4, \quad b = \frac{1}{2}\left(c_4 + \frac{4}{3}d_4 + \frac{3}{4}b_4\right),$$

$$c = \frac{1}{6}\left(c_4 + \frac{4}{3}d_4 + \frac{9}{4}b_4\right), \quad d = ab + \frac{1}{6}\left(c_4 + \frac{3}{4}d_4 + \frac{27}{16}b_4\right).$$

Требование согласованности приближенного метода (5.24) по четвертому порядку точности приводит к условию, что параметры должны определяться системой уравнений

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 1, \quad \frac{3}{4}\gamma_2 + \frac{2}{3}\gamma_3 + a\gamma_4 - \frac{4}{9}\gamma_5 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{9}{32}\gamma_2 + \frac{2}{9}\gamma_3 + \frac{1}{2}a^2\gamma_4 + \frac{4}{85}\gamma_5 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{9}{128}\gamma_2 + \frac{4}{81}\gamma_3 + \frac{1}{6}a^3\gamma_4 - \frac{32}{729}\gamma_5 = \frac{1}{24},$$

$$\frac{3}{8}\gamma_2 + \frac{2}{9}\gamma_3 + b\gamma_4 = \frac{1}{6}, \quad \frac{13}{32}\gamma_2 + \frac{5}{24}\gamma_3 + d\gamma_4 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{8}\gamma_2 + \frac{1}{54}\gamma_3 + c\gamma_4 = \frac{1}{24}.$$

Решим систему (5.27) с помощью описанной выше процедуры. Считая  $a$  фиксированным параметром, из первых четырех уравнений этой системы находим, что

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_5,$$

$$\frac{1}{18}\gamma_3 + a\left(\frac{3}{4} - a\right)\gamma_4 - \frac{35}{81}\gamma_5 = \frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{27}\gamma_3 + a^2\left(\frac{3}{4} - a\right)\gamma_4 - \frac{46}{243}\gamma_5 = 0,$$

т. е.

$$a\left(\frac{3}{4} - a\right)\left(1 - \frac{3}{2}a\right)\gamma_4 - \frac{4}{27}\gamma_5 = \frac{1}{24}.$$

Для обеспечения  $A$ -допустимости операторной функции метода необходимо требовать выполнения неравенств

$$\frac{3}{4} \gamma_2 - \gamma_3 + c_4 \gamma_4 > 0, \quad \frac{1}{2} \gamma_3 + \frac{3}{4} b_4 \gamma_3 + \gamma_4 d_4 > 0, \quad \gamma_4 d_4 < 0.$$

Если в (5.27), (5.28) положить  $a = 2/3$ , то однозначно определяется следующее решение:

$$\gamma_1 = \frac{287}{288}, \quad \gamma_2 = \frac{31}{18}, \quad \gamma_3 = \frac{195}{88}, \quad \gamma_4 = -\frac{633}{176},$$

$$\gamma_5 = -\frac{9}{32}, \quad a_4 = 1, \quad b_4 = -\frac{3820}{5697},$$

$$c_4 = \frac{356}{633}, \quad d_4 = \frac{467}{633}.$$

При этом решении операторная функция приближенного метода (5.24) представляется в виде

$$D_{[4]}(z) = \frac{1 + \frac{2}{11}z - \frac{491}{144}z^2 - \frac{467}{1584}z^3}{1 + \frac{991}{264}z + \frac{2975}{1584}z^2 + \frac{467}{528}z^3}. \quad (5.29)$$

Неявный одношаговый приближенный метод четвертого порядка точности определим так:

$$y_{n+1}^{[4]} = \frac{287}{288} k_1 + \frac{31}{18} k_2(y_{n+1}) + \frac{195}{88} k_3(y_{n+1}) - \\ - \frac{633}{176} k_4(y_{n+1}) - \frac{9}{32} k_2(y_n) + y_n, \quad (5.30)$$

где

$$k_4(y) = hf \left[ y_n + \frac{356}{633} (y - y_n) + k_1 - \frac{3820}{5697} k_2(y) + \frac{467}{633} k_3(y) \right], \\ k_3(y_n) = hf \left( y_n - \frac{4}{9} k_1 \right). \quad (5.31)$$

Таким образом, нами построена совокупность  $A$ -устойчивых вложенных одношаговых неявных приближенных численных методов первого — четвертого порядков точности решения задачи Коши (4.45), (4.46)

$$y_{n+1} = y_n + u_{[k]}(y_{n+1}), \quad (5.32)$$

где

$$u_{[1]}(y) = k_2(y), \quad (5.33)$$

$$u_{[2]}(y) = \frac{1}{3} [k_1 + 2k_2(y)], \quad (5.34)$$

$$u_{[3]}(y) = \frac{1}{4} [k_1 + 3k_2(y)], \quad (5.35)$$

$$u_{[k]}(y) = \frac{287}{288} k_1 + \frac{31}{88} k_2(y) + \frac{195}{88} k_3(y) -$$

$$-\frac{633}{176} k_4(y) - \frac{9}{32} k_3(y_n). \quad (5.36)$$

$$k_1 h f(y_n), \quad k_3(y_n) = h f\left(y_n - \frac{4}{9} k_1\right), \quad (5.37)$$

$$k_2(y) = h f\left[y_n + \frac{3}{4}(y - y_n)\right], \quad (5.38)$$

$$k_3(y) = h f\left[y_n + \frac{10}{9}(y - y_n) - \frac{4}{9} k_2(y)\right], \quad (5.39)$$

$$k_4(y) = h f\left[y_n + \frac{356}{633}(y - y_n) + k_1 - \frac{3820}{5697} k_2(y) + \frac{467}{633} k_3(y)\right] \quad (5.40)$$

( $k = \overline{1, 4}$  — порядок точности приближений).

Рассмотренные приближенные методы в дальнейшем используются для построения и обоснования итерационных алгоритмов решения жестких задач. Условно их будем называть численными методами типа ИДРК-В.

**Численные методы типа ИДРК-В.** Как отмечено выше, методы (5.32) — (5.36), построенные для численного решения задачи Коши вида (4.45), (4.46), являются неявными. Для их реализации предлагается следующая итерационная процедура:

$$y_{n+1,m+1}^{[k]} = y_{n+1,m}^{[k]} + \frac{u_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]} + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]}))}{1 + \frac{u_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]}) - u_{[k]}[y_n + u_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]})]}{u_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]}) + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]})}}, \quad (5.41)$$

где  $k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — порядок численного метода;  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) — итерационный индекс;  $y_{n+1,0}^{[k]} = y_n$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — начальное приближение на  $(n+1)$ -м шаге; величины  $u_{[k]}(y)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) определяются соотношениями (5.33) — (5.36).

**Замечание 5.1.** Если рассмотреть явный метод, получающийся из итерационного процесса (5.41) на нулевой итерации

$$y_{n+1}^{[k]} = y_n^{[k]} + u_{[k]}(y_n^{[k]}) - \frac{u_{[k]}(y_n^{[k]}) - u_{[k]}[y_n^{[k]} + u_{[k]}(y_n^{[k]})]}{1 + \frac{u_{[k]}(y_n^{[k]}) - u_{[k]}[y_n^{[k]} + u_{[k]}(y_n^{[k]})]}{u_{[k]}(y_n^{[k]})}},$$

то он будет совпадать с численными методами из § 4, где доказана их согласованность с порядком точности  $k$ . Однако при больших шагах интегрирования они могут терять точность, что и создает необходимость для задач с переменной жесткостью применять методы (5.41).

Изучим сходимость методов (5.41).

**Теорема 5.1.** Пусть  $|f(y)| < M \forall y \in (-\infty, \infty)$ , выполнены условия теоремы 4.1 и функция  $f'(y)$  является непрерывной, тогда для  $\forall h > 0$  итерационный процесс (5.41) ( $k = \overline{1, 3}$ ) сходится, причем скорость сходимости  $R$  — сверхлинейная.

**Доказательство.** Итерационный процесс (5.41) является способом нахождения корня  $y_{n+1}$ -го уравнения

$$F_{[k]}(y) \equiv u_{[k]}(y) + (y_n + y) \quad (k = \overline{1, 3}). \quad (5.42)$$

Покажем, что существует корень уравнения (5.42). Из условий теоремы и формул (5.33) — (5.35) следует, что

$$F_{[k]}(y) < 0, \quad |u_{[k]}(y)| \leq hM \quad (k = \overline{1, 3}). \quad (5.43)$$

Тогда из (5.42), (5.43) получаем, что на интервале  $\left[y_n - \frac{5}{2} hM, y_n + \frac{5}{2} hM\right]$  непрерывная и монотонная функция  $F_{[k]}(y)$  меняет знак, а значит, имеет единственный корень.

Запишем (5.41) в виде

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} - [y_{[k]}(y^{(m)}, F_{[k]}(y^{(m)}))]^{-1} F_{[k]}(y^{(m)}), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (5.44)$$

где

$$y_{[k]}(y, h_1) = \frac{1}{h_1} [F_{[k]}(y + h_1) - F_{[k]}(y)], \quad y^{(m)} = y_{[k]}^m. \quad (5.45)$$

Легко видеть, что (5.43) является методом Стеффенсена решения уравнения (5.42). Проверим выполнение условий его сходимости.

Согласно условиям а — в (см. с. 76) функция  $F_{[k]}(y)$  дифференцируема, производная ее непрерывна в точке  $y$  и отлична в ней от нуля:

$$\begin{aligned} |F'_{[1]}(y)| &= \left| \frac{3}{4} h f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] - 1 \right| > 1, \\ |F'_{[2]}(y)| &= \left| \frac{1}{2} h f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] - 1 \right| > 1, \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} |F'_{[3]}(y)| &= \left| \frac{3}{4} h f' \left[ y_n + \frac{10}{9} (y - y_n) - \frac{4}{9} k_2(y) \right] \left[ \frac{10}{9} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} h f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] \right] - 1 \right| > 1. \end{aligned}$$

Далее, равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_{[k]}(y, h) = F'_{[k]}(y)$$

равномерно по  $y$ ,  $k = \overline{1, 3}$  (такое отображение называется консистентной аппроксимацией для  $F'_{[k]}(y)$ ). Таким образом, выполнены все условия теоремы о сходимости метода (5.44) [88, с. 350] и, следовательно,  $y_{n+1}$  является точкой притяжения для итераций в (5.44). При этом скорость сходимости  $y^{(m)}$  к  $y_{n+1}$   $R$  — сверхлинейна.

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены условия теоремы 5.2 и функция  $f'(y)$  удовлетворяет условию Липшица, тогда порядок итерационного процесса (5.44)  $R$  будет больше или равен двум.

**Доказательство.** Согласно упоминавшейся выше теореме Дж. Ортеги и В. Рейнболдта [88] нужно убедиться только в стро-

гой консистентной аппроксимации  $F_{[k]}(y)$ , т. е. в справедливости неравенства

$$|F'_{[k]}(y) - y_{[k]}(y, h_1)| \leq c_k |h_1|, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (5.47)$$

где  $c_k$  — некоторая константа.

Действительно, имеем, что

$$\begin{aligned} |F'_{[1]}(y) - y_{[1]}(y, h_1)| &= \left| \frac{3}{4} h f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 1 - \frac{1}{h_1} [-h_1 + u_{[1]}(y + h_1) - u_{[1]}(y)] \right| = \\ &= \frac{3}{4} h \left| f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] - f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (\tilde{y} - y_n) \right] \right| \leq \left( \frac{3}{4} \right)^2 h L_1 |h_1|, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где  $\tilde{y}$  лежит между  $y$  и  $y + h_1$ ;  $L_1$  — константа Липшица для  $f'(y)$ ;

$$\begin{aligned} |F'_{[2]}(y) - y_{[2]}(y, h_1)| &= \left| \frac{1}{2} h f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 1 - \frac{1}{h_1} [-h_1 + u_{[2]}(y + h_1) - u_{[2]}(y)] \right| = \\ &= \frac{1}{2} h \left| f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] - f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (\tilde{y} - y_n) \right] \right| \leq \frac{3}{8} h L_1 |h_1|, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} |F'_{[3]}(y) - y_{[3]}(y, h_1)| &= \left| \frac{3}{4} h f' \left[ y_n + \frac{10}{9} (y - y_n) - \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{9} k_2(y) \right] \left[ \frac{10}{9} - \frac{1}{3} h f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] \right] - \\ &\quad - 1 - \frac{1}{h_1} \left[ h_1 + \frac{3}{4} h f \left[ y_n + \frac{10}{9} (y + h_1 - y_n) - \frac{4}{9} k_2(y + h_1) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} h f \left[ y_n + \frac{10}{9} (y - y_n) - \frac{4}{9} k_2(y) \right] \right] \Bigg| = \\ &= h \left| \frac{3}{4} \left[ f' \left[ y_n + \frac{10}{9} (y - y_n) - \frac{4}{9} k_2(y) \right] - f' \left[ y_n - \frac{10}{9} (\tilde{y} - y_n) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{9} k_2(\tilde{y}) \right] \right] \left[ \frac{10}{9} - \frac{1}{3} h f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} f' \left[ y_n + \frac{10}{9} (\tilde{y} - y_n) - \frac{4}{9} k_2(\tilde{y}) \right] \frac{1}{3} h \left[ f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (\tilde{y} - y_n) \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f' \left[ y_n + \frac{3}{4} (y - y_n) \right] \right] \right| \leq \frac{3}{4} h L_1 \left| \frac{10}{9} (y - \tilde{y}) - \frac{4}{9} [k_2(y) - \right. \\ &\quad \left. - k_2(\tilde{y})] \right| \left| \frac{10}{9} + \frac{1}{3} h L + \frac{1}{4} L h^2 L_1 \right| \frac{3}{4} |\tilde{y} - y| \leq \\ &\leq \frac{3}{4} h L_1 \left[ \frac{10}{9} |h_1| + \frac{1}{3} h L |h_1| \right] \left( \frac{10}{9} + \frac{1}{3} h L \right) + \frac{h^2}{4} L L \frac{3}{4} |h_1| = \\ &= \left[ \frac{3}{4} h L_1 \left( \frac{10}{9} + \frac{1}{3} h L \right)^2 + \frac{3}{16} h^2 L L_1 \right] |h_1|, \end{aligned} \quad (5.50)$$

где  $L$  — константа Липшица для функции  $f(y)$ .

Из (5.48) — (5.50) сразу получаем (5.47) с

$$c_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 hL, \quad (5.51)$$

$$c_2 = \frac{3}{8} hL_1, \quad (5.52)$$

$$c_3 = \left[ \frac{3}{4} hL_1 \left( \frac{10}{9} + \frac{1}{3} hL \right)^2 + \frac{3}{16} h^2 L L_1 \right]. \quad (5.53)$$

Теорема доказана.

Применяя численные методы (5.41) к решению модельного уравнения (4.41), можно легко убедиться в том, что они характеризуются операторными функциями (5.8), (5.13), (5.21) и (5.29). Учитывая идентичность доказательства для любых из численных методов, приведем его для численного метода первого порядка. Так как  $k_1 = -zy_n$  и  $k_2(y) = -\frac{1}{4}zy_n - \frac{3}{4}zy$ ,

то

$$u_{[1]}(y) = k_2(y) = -\frac{1}{4}zy_n - \frac{3}{4}zy, \quad y_n + u_{[1]}(y) = \left(1 - \frac{1}{4}z\right)y_n - \frac{3}{4}zy,$$

$$u_{[1]}[y_n + u_{[1]}(y)] = -\frac{1}{4}zy_n - \frac{3}{4}[y_n + u_{[1]}(y)]z =$$

$$= -\frac{1}{4}zy_n - \frac{3}{4}z\left[\left(1 - \frac{1}{4}z\right)y_n - \frac{3}{4}zy\right],$$

$$u_{[1]}(y) - u_{[1]}[y_n + u_{[1]}(y)] = \frac{3}{4}z\left[\left(1 - \frac{1}{4}z\right)y_n - \left(1 + \frac{3}{4}z\right)y\right],$$

т. е.

$$\frac{u_{[1]}(y) - u_{[1]}[y_n + u_{[1]}(y)]}{u_{[1]}(y) + (y_n - y)} = \frac{3}{4}z.$$

Следовательно,

$$y_{n+1,m+1}^{[k]} = y_{n+1,m}^{[1]} + \frac{\left(1 - \frac{1}{4}z\right)y_n - \left(1 + \frac{3}{4}z\right)y_{n+1,m}^{[1]}}{1 + \frac{3}{4}z} = \frac{1 - \frac{1}{4}z}{1 + \frac{3}{4}z} y_n. \quad (5.54)$$

Таким образом, на любой итерации численный метод первого порядка характеризуется  $A$ -допустимой операторной функцией (5.8). Этим же свойством обладает любой из численных методов (5.41).

**Специальные одношаговые неявные приближенные методы смешанных типов устойчивости.** Рассмотрим обоснование неявных одношаговых приближенных методов решения задачи Коши (4.45), (4.46), обладающих следующими свойствами:

а) максимальной информацией в предыдущем узле интегрирования  $x_n$ ;

б)  $L$ -устойчивостью, приближенных методов нечетных порядков точности и  $A$ -устойчивостью — четных;  
в) вложенностью.

Исходя из этого, в качестве приближенных методов первого и второго порядков точности примем методы (5.9) и (5.12) вида

$$y_{n+1} = y_n + \omega_{[1]}(y_{n+1}), \quad (5.55)$$

$$\omega_{[1]}(y) = \frac{1}{3} [4k_2(y) - k_1], \quad (5.56)$$

$$y_{n+1} = y_n + \omega_{[2]}(y_{n+1}), \quad (5.57)$$

$$\omega_{[2]}(y) = \frac{1}{3} [k_1 + 2k_2(y)]. \quad (5.58)$$

Если использовать больший объем входной информации, то можно построить неявные приближенные методы второго порядка точности любых типов устойчивости. Например, вложенными относительно приближенных методов третьего порядка (5.22), (5.23) являются следующие  $L$ -устойчивые приближенные методы второго порядка точности:

$$y_{n+1} = y_n + u_{[2]1}(y_{n+1}), \quad (5.59)$$

$$y_{n+1} = y_n + u_{[2]2}(y_{n+1}), \quad (5.60)$$

где

$$u_{[2]1}(y) = \frac{1}{72} [55k_1 - 64k_2(y) + 108k_3(y) - 27k_3(y_n)], \quad (5.61)$$

$$u_{[2]2}(y) = \frac{1}{32} [21k_1 - 16k_2(y) + 36k_3(y) - 9k_3(y_n)], \quad (5.62)$$

которые характеризуются соответственно  $L$ -допустимыми операторными функциями

$$D_{[2]1}(z) = \frac{1}{+z + \frac{1}{2}z^2}, \quad (5.63)$$

$$D_{[2]2}(z) = \frac{1 - \frac{1}{8}z}{1 + \frac{7}{8}z + \frac{3}{8}z^2}. \quad (5.64)$$

Заметим, что здесь  $k_3(y)$  определяется соотношением (5.23), а

$$k_3(y_n) = hf \left( y_n - \frac{4}{9} k_1 \right). \quad (5.65)$$

Следует отметить, что использование (5.23) и (5.65) в совокупности с  $k_2(y)$  и  $k_1$  не позволяет получить неявного приближенного метода третьего порядка точности, обладающего свойством  $L$ -устойчивости. Поэтому в качестве неявных приближенных методов первого и второго порядков точности в дальнейшем нами рассматриваются методы вида (5.55) и (5.57). Построим для них одношаговый неявный приближенный

метод третьего порядка точности. Для этого пусть заданы величины

$$k_1 = hf(y_n), \quad (5.66)$$

$$k_2(y) = hf \left[ y_n + \frac{3}{4}(y + y_n) \right], \quad (5.67)$$

$$k_3(y) = hf[y_n + c_3(y - y_n) + a_3k_1 + b_3k_2(y)], \quad (5.68)$$

$$k_3(y_n) = hf[y_n + (a_3 + b_3)k_1], \quad (5.69)$$

где  $c_3, a_3, b_3$  — параметры, которые следует определить. Очевидно, что

$$k_3(y) = hf + ah^2f \frac{df}{dy} + \frac{1}{2}a^2h^3f^2 \frac{d^2f}{dy^2} + bh^3f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + O(h^4), \quad (5.70)$$

$$k_3(y_n) = hf + (a - c_3)h^2f \frac{df}{dy} + \frac{1}{2}(a - c_3)^2h^3f^2 \frac{d^2f}{dy^2} + O(h^4), \quad (5.71)$$

где

$$a = c_3 + a_3 + b_3, \quad b = \frac{1}{2} \left( c_3 + \frac{3}{2}b_3 \right). \quad (5.72a)$$

Пусть задачей является построение и обоснование одношагового  $L$ -устойчивого неявного приближенного метода третьего порядка точности

$$y_{n+1} = y_n + \omega_{[3]}(y_{n+1}), \quad (5.72b)$$

где

$$a) \quad \omega_{[3]}(y) = \gamma_1 k_1 + \sum_{s=2}^4 \gamma_s k_s(y), \quad (5.73)$$

б)  $\gamma_1 - \gamma_4$  — параметры.

Очевидно, что условие согласованности метода (5.72) по третьему порядку точности можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 &= 1, \quad \frac{3}{4}\gamma_2 + a\gamma_3 + (a - c_3)\gamma_4 = \frac{1}{2}, \\ \frac{9}{32}\gamma_2 + \frac{1}{2}a^2\gamma_3 + \frac{1}{2}(a - c_3)^2\gamma_4 &= \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{8}\gamma_2 + b\gamma_3 = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

По отношению к модельному уравнению (4.41) метод (5.72b) характеризуется операторной функцией

$$D(z) = \frac{1 - z \left[ \gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2 + (1 - c_3)\gamma_3 + \gamma_4 \right] + z^2 \left[ \left( a_3 + \frac{1}{4}b_3 \right) \gamma_3 + (a - c_3)\gamma_4 \right]}{1 + z \left( \frac{3}{4}\gamma_2 + c_3\gamma_3 \right) - \frac{3}{4}b_3\gamma_3 z^2}.$$

Исходя из условий устойчивости, основные параметры в (5.72a) следует принять такими, чтобы

$$\frac{3}{4}\gamma_2 + c_3\gamma_3 > 0, \quad b_3\gamma_3 < 0, \quad \left( a_3 + \frac{1}{4}b_3 \right) \gamma_3 + (a - c_3)\gamma_4 = 0.$$



С учетом этих условий и связей (5.71) получено следующее решение системы уравнений (5.74):

$$\gamma_1 = \frac{2}{9}, \quad \gamma_2 = \frac{4}{9}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_4 = 0,$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = -\frac{2}{3}, \quad c_3 = 1.$$

Следовательно, приближенный метод третьего порядка точности определяется из соотношения

$$\omega_{[3]}(y) = \frac{1}{9} [2k_1 + 4k_2(y) + 3k_3(y)], \quad (5.75)$$

где

$$k_3(y) = hf \left[ y + \frac{1}{6} k_1 - \frac{2}{3} k_2(y) \right], \quad (5.76)$$

$$k_3(y_n) = hf \left( y_1 - \frac{1}{2} k_1 \right). \quad (5.77)$$

Приближенный метод (5.72), (5.75) — (5.77) характеризуется следующей  $L$ -допустимой операторной функцией:

$$D_{[3]}(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z}{1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}. \quad (5.78)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае

$$k_3(y) = hf + \frac{1}{2} h^2 f \frac{df}{dy} + \frac{1}{8} h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{48} h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} -$$

$$- \frac{1}{12} h^4 f \left( \frac{df}{dy} \right)^3 - \frac{1}{48} h^4 f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + O(h^5). \quad (5.79)$$

Аналогично неявный приближенный метод четвертого порядка точности, обладающий свойством вложенности, находим в виде

$$y_{n+1} = y_n + \omega_{[4]}(y_{n+1}), \quad (5.80)$$

где

$$\omega_{[4]}(y) = \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2(y) + \gamma_3 k_3(y) + \gamma_4 k_4(y) + \gamma_5 k_3(y_n), \quad (5.81)$$

$$k_4(y) = hf [y_n + c_4(y - y_n) + a_4 k_1 + b_4 k_2(y) + d_4 k_3(y)]. \quad (5.82)$$

Очевидно, что

$$c_4(y - y_n) + a_4 k_1 + b_4 k_2(y) + d_4 k_3(y) = ahf + bh^2 f \frac{df}{dy} + ch^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 +$$

$$+ dh^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + O(h^4), \quad (5.83)$$

где

$$a = c_4 + a_4 + b_4 + d_4, \quad b = \frac{1}{2} c_4 + \frac{3}{4} b_4 + \frac{1}{2} d_4,$$

$$c = \frac{1}{6} c_4 + \frac{3}{8} b_4, \quad d = \frac{1}{6} c_4 + \frac{9}{32} b_4 + \frac{1}{8} d_4. \quad (5.84)$$

Учитывая (5.83) и (5.84), находим, что

$$k_4(y) = hf + \frac{1}{2} h^2 \cdot 2af \frac{df}{dy} + \frac{1}{2} a^2 h^3 f^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + bh^3 f \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \\ + \frac{1}{6} a^3 h^4 f^3 \frac{d^3 f}{dy^3} + dh^4 f^2 \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dy^2} + ch^4 f \left( \frac{df}{dy} \right)^3 + O(h^5), \quad (5.85)$$

где

$$a = c_4 + a_4 + b_4 + d_4, \quad b = \frac{1}{2} c_4 + \frac{3}{4} b_4 + \frac{1}{2} d_4, \\ c = \frac{1}{6} c_4 + \frac{3}{8} b_4, \quad d = ab + \left( \frac{1}{6} c_4 + \frac{9}{32} b_4 + \frac{1}{8} d_4 \right). \quad (5.86)$$

Тогда условия согласованности неявного приближенного метода (5.80) по четвертому порядку точности записываются в виде

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 1, \\ \frac{3}{4} \gamma_2 + \frac{1}{2} \gamma_3 + a\gamma_4 - \frac{1}{2} \gamma_5 = \frac{1}{2}, \\ \frac{9}{32} \gamma_2 + \frac{1}{8} \gamma_3 + \frac{1}{2} a^2 \gamma_4 + \frac{1}{8} \gamma_5 = \frac{1}{6}, \\ \frac{9}{128} \gamma_2 + \frac{1}{48} \gamma_3 + \frac{1}{6} a^3 \gamma_4 - \frac{1}{48} \gamma_5 = \frac{1}{24}, \\ \frac{3}{8} \gamma_2 + b\gamma_4 = \frac{1}{6}, \quad (5.87)$$

$$\frac{13}{32} \gamma_2 - \frac{1}{48} \gamma_3 + \alpha\gamma_4 = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{8} \gamma_2 - \frac{1}{12} \gamma_3 + c\gamma_4 = \frac{1}{24}.$$

Условия разрешимости системы уравнений (5.86) можно записать в виде равенства  $b + c = 4d - 4ab$ . Его выполнение приводит к требованию выполнения следующего соотношения:  $\left( \frac{9}{8} - \frac{3}{2} a \right) \gamma_2 = \frac{11}{24} - \frac{2}{3} a$ . Отсюда, полагая  $a = 1$ , находим, что  $\gamma_2 = \frac{5}{9}$ . Тогда из первых четырех уравнений системы (5.87) определяем:

$$\gamma_1 = \frac{49}{144}, \quad \gamma_3 = \frac{7}{48}, \quad \gamma_4 = -\frac{1}{144}, \quad \gamma_5 = -\frac{5}{144}.$$

Далее, из последних трех уравнений системы (5.87) находим

$$b = 6, \quad c = \frac{9}{4}, \quad d = \frac{129}{16}.$$

Полученные значения параметров позволяют определить следующее семейство решений системы уравнений (5.86):

$$a_4 = -11 + \frac{1}{2} b_4, \quad c_4 = \frac{27}{2} - \frac{9}{4} b_4, \quad d_4 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4} b_4.$$

Последнее позволяет получать устойчивости различных типов для неявных одношаговых приближенных методов четвертого порядка

ТОЧНОСТИ:

$$\omega_{[4]}(y) = \frac{1}{144} [49k_1 + 80k_2(y) + 21k_3(y) - k_4(y) - 5k_3(y_n)]. \quad (5.88)$$

Нетрудно убедиться, что от выбора параметров  $c_4$ ,  $a_4$ ,  $d_4$  и  $b_4$ , а точнее — от выбора последнего из них, зависит точность изучаемых методов. Действительно, полагая  $b_4 = 6$ , определяем  $c_4 = 0$ ,  $a_4 = -8$  и  $d_4 = 3$ , т. е.

$$k_4(y) = hf [y_n - 8k_1 + 6k_2(y) + 3k_3(y)]. \quad (5.89)$$

Неявный приближенный метод (5.80), (5.83), (5.89) характеризуется  $A$ -допустимой операторной функцией

$$D_{[4]}(z) = \frac{1 - \frac{7}{16}z + \frac{1}{16}z^2}{1 + \frac{9}{16}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{96}z^3}. \quad (5.90)$$

Если положить  $b_4 = 2$ , то  $c_4 = 9$ ,  $a_4 = -10$ ,  $d_4 = 0$ , т. е.

$$k_4(y) = hf [y_n + 9(y - y_n) - 10k_1 + 2k_2(y)].$$

Нетрудно убедиться, что эти методы являются  $A$ -устойчивыми.

Учитывая изложенное выше, рассмотрим одношаговые итерационные численные методы вида

$$y_{n+1,m+1}^{[k]} = y_{n+1,m}^{[k]} + \frac{\omega_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]}) + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]})}{1 + \frac{\omega_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]}) - \omega_{[k]}[y_n + \omega_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]})]}{\omega_{[k]}(y_{n+1,m}^{[k]}) + (y_n - y_{n+1,m}^{[k]})}}, \quad (5.91)$$

где  $k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — порядок точности численного метода;  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) — итерационный индекс;  $y_{n+1,0}^{[k]} = y_n$  ( $k = \overline{1, 4}$ ); выражения для  $\omega_{[k]}(y)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) задаются соответственно соотношениями (5.56), (5.58), (5.75) и (5.88).

Отметим, что численные методы §4 используются в качестве первых итераций на шаге для численных методов (5.91). Свойства численных методов (5.91) полностью аналогичны свойствам численных методов (5.41) и справедливы теоремы типа 5.1—5.2.

Численные методы (5.91) характеризуются также тем, что  $L$ -устойчивые численные методы первого и третьего порядков сочетаются с  $A$ -устойчивыми численными методами второго и четвертого порядков. Это позволяет расширить области их применения. С помощью этих методов можно решать плохо обусловленные, мягкие, жесткие, сильно жесткие и жестко осциллирующие задачи. Кроме того, они характеризуются вложенностью, что позволяет эффективно реализовать их на ЭВМ.

Все изложенные выше численные методы распространяются на системы уравнений покомпонентно или в случае больших систем с помощью итерационной процедуры Зейделя. Важной характеристикой рассмотренных численных методов является применимость их для

Программы	ИДРК-В	ИДРК-В	ИДРК-В	EPISODE	EPISODE	STIFF
Порядок	3	4	4	1-6	1-6	1-6
Итерации на методе по- рядка	3	3	3	—	—	—
Точность	1E-2	1E-2	1E-3	1E-2	1E-3	1E-2
УТ	ДУ	ДУ	ДУ	ДУ	ДУ	ДУ

Задание № 1 (плохо обусловленная задача;  $x = 1$ )

2202,65	0,21 E-3	0,45 E-1	0,74 E-4	-0,17 E+1	-0,64 E-1	0,22 E+2
2251,78	0,84 E+1	0,31 E+1	0,3 E-1	-0,25 E+2	0,92 E+1	0,39 E+2
2251,78	0,51 E+1	0,71 E+1	0,38 E+1	0,16 E+2	-0,15 E+1	0,6 E+2
2187,8	-0,11 E+2	-0,62 E+1	-0,24 E+1	-0,47 E+3	0,1 E+2	0,5 E+1
2225,37	0,88 E+1	0,11 E+2	-0,31 E+1	0,92 E+2	0,77 E+2	0,3 E+2
Шагов	334	276	371	174	200	407
Макс. шаг	0,72 E-2	0,82 E-2	0,69 E-2	0,62 E-2	0,68 E-2	0,015

Задание № 2 (мягкая задача;  $x = 1$ ) в программах STIFF и EPISODE обращение матрицы Якоби — методом численного дифференцирования

0,1353	0,3 E-5	0,45 E-8	0,2 E-3	0,25 E-3	-0,22 E-3	0,4 E-3
0,8696	0,21 E-4	0,3 E-4	0,4 E-4	0,23 E-2	0,13 E-3	0,1 E-2
2,013	0,13 E-4	-22 E-4	-0,5 E-4	0,23 E-2	0,13 E-3	0,2 E-2
1,704	-0,34 E-1	-0,79 E-2	-0,68 E-3	0,11 E+0	0,34 E-1	0,6 E-1
1,504	0,37 E-1	-0,14 E-1	-0,38 E-2	0,27 E-1	0,46 E-1	0,5 E-1
Шагов	48	34	37	22	34	34
Макс. шаг	0,06	0,053	0,04	0,062	0,035	0,041

Задание № 3 (быстро осциллирующая задача;  $x = 1$ )

Нет свед.	0,28 E-11	0,83 E-14	0,13 E-13	-0,55 E-8	-0,59 E-9	0,5 E-3
	0,66 E-10	-0,26 E-10	-0,87 E-14	0,34 E-7	0,24 E-8	0,5 E-2
	0,12 E-9	0,12 E-9	0,22 E-9	0,13 E-7	0,72 E-9	0,3 E-2
	0,22 E+0	0,24 E+0	-0,12 E-1	0,41 E+5	0,27 E+1	0,2 E+0
	0,59 E+0	0,6 E+0	0,15 E+0	0,1 E+9	0,47 E+1	0,6 E+0
Шагов	3000	2605	3917	2662	2780	2574
Макс. шаг	0,001	0,0011	0,001	0,001	0,001	0,001

Задание № 4a (жесткая задача;  $x = 1$ )

0	-0,46 E-10	0,22 E-10	0,23 E-10	0,17 E-5	-0,13 E-5	0,3 E-42
0,1987	-0,18 E-3	-0,22 E-4	-0,54 E-6	0,1 E-2	0,13 E-2	0,4 E-6
0,5083	-0,4 E-3	-0,8 E-3	-0,22 E-5	-0,9 E-2	0,27 E-2	0,1 E-5
0,5083	-0,7 E-3	-0,68 E-3	-0,18 E-5	-0,9, E-2	0,27 E-2	0,1 E-5
	-0,74	-0,68 E-3	-0,18 E-5	-0,9 E-2	0,27 E-2	0,1 E-5
Шагов	30	32	56	42	61	450
Макс. шаг	0,34	0,31	0,23	0,68	0,48	0,0024

Задание № 5 (жестко осциллирующая задача;  $x = 1$ )

0	-0,1 E-8	0,3 E-8	-0,12 E-7	0,0	0,0	Большое время счета
1,98766	-0,21 E-3	-0,1 E-3	0,61 E-4	0,3 E-8	0,15 E-9	
0,508326	-0,81 E-2	-0,1 E-3	0,1 E-2	0,3 E-8	0,15 E-8	
0,508326	-0,89 E-2	-0,14 E-1	-0,13 E-2	-0,32 E+1	-0,2 E+1	
0,508326	-0,64 E-2	0,41 E-1	-0,99 E-3	-0,32 E+2	-0,3 E+1	
Шагов	2001	1557	1384	1198	1227	
Макс. шаг	0,0029	0,0029	0,0045	0,001	0,0011	

Примечание. Тест № 2; ЭВМ ЕС-1060; комбинационная оценка точности на шаге; в программах STIFF и EPISODE используются методы Гира первого-шестого порядков; УТ — точное решение; УП — приближенное решение; ДУ — погрешность.

решения как нежестких, так и жестких задач с любыми воспринимаемыми ЭВМ степенями жесткости.

Краткие сведения о программной реализации и экспериментальных исследованиях численных методов следующие.

Численные методы (4.41) и (5.91) реализованы в программных модулях ИДРК-В и ИДРК-В-АЛ на алгоритмическом языке БЭЙСИК применительно к малым ЭВМ.

С помощью указанных выше программных модулей произведены экспериментальные исследования на тестовых и прикладных задачах, в частности, рассмотрены некоторые химические задачи. Проведенные численные эксперименты показали, что полученные результаты таковы:

а) по точности адекватны получаемым с помощью известной программы STIFF с использованием численных методов Гира до шестого порядка точности включительно;

б) по количеству шагов на интервале фиксированной длины лучше, чем полученные при тех же условиях с помощью программы EPISODE.

Отметим также, что известная программа EPISODE, в которой запрограммированы численные методы Гира до шестого порядка включительно при небольшом количестве шагов интегрирования, приводит к ненадежным результатам по точности.

Сделанные выводы следуют из результатов, приведенных в табл. 2 и табл. 3. Результаты вычислительного эксперимента приводятся для теста № 1 (см. систему уравнений (4.42) и для теста № 2, именуемого тестом Н. Н. Калиткина [3], которые имеют точное решение. Последнее повышает степень доверия к результатам и их качеству. Для наглядности приведем условие теста № 2 [3]. Система уравнений:

$$y_1' = \mu_0 y_1, \quad y_2' = (\mu_0 - \mu_1) y_1 + (\mu_1 + \gamma_1) y_2 - \nu_1 y_3,$$

$$y_3' = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1) y_3,$$

$$y_4' = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_3) y_3 + (\mu_2 + \nu_2) y_4 - \nu_2 y_5,$$

$$y_5' = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2 - \nu_2) y_3 + \\ + 2\nu_2 y_4 + (\mu_2 - \nu_2) y_5.$$

При начальных условиях  $y_1(0) = y_3(0)$  и  $y_4(0) = y_5(0)$  запись точного решения возможна в виде

$$y_1(x) = y_1(0) e^{\mu_0 x}, \quad y_2(x) = y_1(x) + [y_2(0) - y_1(0)] e^{\mu_1 x} \cos \nu_1 x,$$

$$y_3(x) = y_1(x) + \sqrt{2} [y_2(0) - y_1(0)] e^{\mu_1 x} \sin \left( \nu_1 x + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$y_4(x) = y_3(x) + [y_4(0) - y_2(0)] e^{\mu_2 x} \cos \nu_2 x,$$

$$y_5(x) = y_3(x) + \sqrt{2} [y_4(0) - y_2(0)] e^{\mu_2 x} \sin \left( \nu_2 x + \frac{\pi}{4} \right).$$

УТ	УП	ДУ
----	----	----

Задание № 2 (мягкие задачи;  $x = 1$ )

$$EO = 1E - 2 \quad h = 0,266896 E-1 \quad k = 3$$

0,135335	0,135331	0,451924 E-5
0,869682	0,869682	0,305489 E-6
2,01336	2,01337	-0,355771 E-5
1,70468	1,71422	-0,559306 E-2
1,50455	1,5033	0,827013 E-3

Шагов 35      Макс. шаг 0,686188 — 1      Время 20,8 с

Задание № 4а (жесткая задача),  $EO = 1E - 2$ 

$$x = 1 \quad h = 0,354602 \quad k = 3$$

0	0,931338 E-6	-0,931338 E-6
0,198766	0,197379	0,138663 E-2
0,508326	0,51421	-0,588422 E-2
0,508326	0,51436	-0,603356 E-2
0,508326	0,51436	-0,603356 E-2

Шагов 27      Макс. шаг 0,354602      Время 9,3 с

Задание № 4б (жесткая задача),  $EO = 1E - 2$ 

$$x = 1 \quad h = 0,1263368 \quad k = 3$$

0	0,466444 E-8	-0,466444 E-8
0,198766	0,198676	0,899676 E-4
0,508326	0,508485	-0,158732 E-3
0,508326	0,508515	-0,188853 E-3
0,508326	0,508506	-0,180321 E-3

Шагов 28      Макс. шаг 0,167541      Время 27,7

Задание № 4а (жесткая задача),  $EO = 1E - 2$ 

$$x = 1 \quad h = 0,192772 \quad k = 4$$

0	0,271674 E-10	-0,271675 E-10
0,198766	0,198763	0,312711 E-5
0,508326	0,508394	-0,67534 E-4
0,508326	0,508394	-0,114563 E-3
0,508326	0,505441	-0,114564 E-3

Шагов 24      Макс. шаг 0,212098      Время 15,4

Задание № 4а (жесткая задача),  $EO = 1E - 4$ 

$$x = 1 \quad h = 0,470529 E-1 \quad k = 4$$

0	-0,438617 E-20	0,438617 E-20
0,198766	0,198765	0,930254 E-6
0,508326	0,508325	0,923616 E-6
0,508326	0,508308	0,176607 E-4
0,508326	0,508308	0,176607 E-4

Шагов 59      Макс. шаг 0,195109      Время 35,8

Задание № 46 (жесткая задача),  $EO=1E-2$

	$x = 1$	$h = 0,413367 E-1$	$k = 3$
0		$-0,345469 E-6$	$0,345469 E-6$
0,198766		0,196249	$0,251725 E-2$
0,508326		0,516415	$-0,808885 E-2$
0,508326		0,51637	$-0,80437 E-2$
0,508326		0,516412	$-0,808603 E-2$
Шагов 28	Макс. шаг 0,475546	Время 10,2	

Примечание. Тест № 2, программа ИДРК-В-А; ЭВМ СМ-4;  $HO = 1E-5$ , оценка точности на шаге — комбинированная. УТ, УП, ДУ — то же, что в табл. 2.

Т а б л и ц а 4

УТ	УП	ДУ
	$x=1$	$h=0,0323795$
		$k=4$
0,18394	0,183938	$0,215239 E-5$
0,18394	0,183938	$0,215242 E-5$
Шагов 34	Макс. шаг 0,246627	Время 12,3 с
	$x=10$	$h=3,54019$
		$k=3$
$0,227 E-4$	$0,139185 E-3$	$-0,116485 E-3$
$0,227 E-4$	$0,139184 E-3$	$-0,116484 E-3$
Шагов 45	Макс. шаг 3,54019	Время 15,3 с
	$x=100$	$h=7,46345$
		$k=3$
0	$-0,465986 E-5$	$0,465986 E-6$
0	$-0,465986 E-6$	$0,465986 E-6$
Шагов 58	Макс. шаг 34,7956	Время 18 с
	$x=1000$	$h=156,433$
		$k=3$
0	$0,39898 E-6$	$-0,398898 E-6$
0	$0,398898 E-6$	$-0,398898 E-6$
Шагов 63	Макс. шаг 365,27	Время 18,8 с

Примечание. Тест № 1; программа ИДРК-В; ЭВМ СМ-4;  $HO = 0,1/c$ ;  $EO = 1E-4$ ; оценка точности на шаге — комбинированная. УТ, УП, ДУ — то же, что в табл. 2.

Задания для тестирования (наборы начальных данных и параметров):

№ 1 (плохо обусловленные системы):

$$\mu_0 = 10, \quad \mu_2 = 5, \quad \mu_1 = 4, \quad \nu_1 = 20\pi, \quad \nu_2 = 100,$$

$$y_1(0) = 0,1; \quad y_2(0) = 1; \quad y_4(0) = 0,5.$$



№ 2 (мягкие системы):

$$\mu_0 = -2, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1, \quad \nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 10, \\ y_1(0) = 1; \quad y_2(0) = 1,5; \quad y_4(0) = 2,5.$$

№ 3 (быстро осциллирующие системы):

$$\mu_0 = -2, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1, \quad \nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 1000, \\ y_1(0) = 0,5; \quad y_2(0) = 0,8; \quad y_4(0) = 2.$$

№ 4а (жесткие системы):

$$\mu_0 = -100, \quad \mu_1 = -1, \quad \mu_2 = -10^5, \quad \nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 10, \\ y_1(0) = 10, \quad y_2(0) = 11, \quad y_4(0) = 111.$$

№ 4б (жесткие системы) получаются из № 4а заменой  $\nu_2 = 1000$ .

№ 5 (жестко осциллирующие системы):

$$\mu_0 = -10^5, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -100, \quad \nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 1000, \\ y_1(0) = 100, \quad y_2(0) = 101, \quad y_4(0) = 201.$$

Приведенные в табл. 1—3 некоторые результаты экспериментальных испытаний обоснованных численных методов свидетельствуют о их надежной работоспособности. Разработанные на их основе программные модули ИДРК-В, ИДРК-В-А и другие успешно конкурируют с известными программами для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Они дополнительно обладают свойством успешно решать как жесткие, так и нежесткие задачи.

Программы типа ИДРК-В адаптированы к ЕС ЭВМ. Кроме того, программные модули типа ИДРК-В применялись при численном исследовании математических моделей в химической кинетике при наличии температурных режимов, которые вызывают появление осцилляций в поведении компонент решения и различных других эффектов. Однако основное преимущество обоснованных численных методов состоит в том, что они применимы при исследовании жестких задач с большими степенями жесткости. Поэтому они имеют перспективы применения в математическом моделировании.

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕГЛАДКОЙ ВХОДНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ- СИГНАЛОВ ПО КОНЕЧНОМУ МНОЖЕСТВУ ДАННЫХ

Многие задачи инженерной практики сводятся к решению линейных и нелинейных интегральных уравнений. Найти точное решение таких уравнений в аналитической форме удастся лишь в отдельных случаях, поэтому не вызывает сомнений важность методов приближенного решения интегральных уравнений.

В данной главе рассмотрены интегральные уравнения второго рода с постоянными границами интегрирования. Для линейных и нелинейных уравнений выводятся условия, при которых решения уравнений принадлежат дробным соболевским пространствам. Для приближенного решения исходного уравнения получены разностные схемы путем специального усреднения ядра и правой части уравнения. Доказана сходимость приближенного решения к точному в упомянутых выше пространствах при естественных требованиях гладкости ядра и правой части (для линейных уравнений) и подынтегрального выражения (для нелинейных уравнений).

Кроме того, рассмотрены задачи интерпретации наблюдений по неполным данным и задача восстановления функций-сигналов по конечному множеству данных, а также некоторые вопросы интерполирования нелинейных операторов в функциональных пространствах.

### § 1. Интерпретация результатов наблюдений по неполным данным

1. **Линейная модель наблюдений.** Рассматривается задача интерпретации наблюдений поля (процесса, сигнала)  $u(x) \in L_2[D]$ ,  $x \in D \subset E^n$ , конечным множеством рецепторов (датчиков) с характеристиками направленности  $g_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , [62, 63]. На выходах рецепторов фиксируются компоненты данных наблюдений

$$y = [y_1, \dots, y_n]^T, \\ y_k = \int_D g_k(x) u(x) dx, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где  $g_k(x)$  и  $u(x)$  — комплекснозначные функции,  $g_k(x) \in C[D]$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,  $u(x) \in L_2[D]$ . Задача интерпретации заключается в восстановлении наблюдаемого поля  $u(x)$  по данным  $y$ , т. е. сводится

к решению системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода (1.1), к решению конечной проблемы моментов. Наличие только конечного числа рецепторов, конечного количества данных для определения континуума значения поля  $u(x)$  делает проблему моментов неполной, а поставленную задачу некорректной в смысле Адамара вследствие бесконечного множества решений и их неустойчивости.

Большое значение для практических приложений имеет задача восстановления точечных полей по данным от конечного множества рецепторов. При этом в математическом плане требуется использование аналогов  $\delta$ -функций Дирака, введенных впервые в науку в квантово-механических исследованиях.

Для области  $D$  определим  $\delta$ -функцию из равенства

$$\int_D r(x) \delta(x - \xi) dx = r(\xi), \quad \xi \in D,$$

где  $r(x)$  — любая непрерывная в  $D$  функция [38, с. 83]. Тогда точечное поле, сосредоточенное в точках  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , с комплексными амплитудами  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , может быть представлено в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^N A_k \delta(x - x_k).$$

Для описания поля, создаваемого материальными точками  $x_k$  с комплексными амплитудами  $A_k$ , используются приведенные выше линейные непрерывные функционалы. Непрерывные функции  $r(x)$ ,  $x \in D$  являются основными для  $\delta$ -функций.

Если поле  $u(x)$  наблюдается рецептором с непрерывной характеристикой направленности  $g(x)$ ,  $x \in D$ , то на выходе рецептора фиксируется значение

$$y = \int_D g(x) u(x) dx = \sum_{k=1}^N A_k g(x_k).$$

В этом случае задача интерпретации сводится к отысканию  $N$  (числа точек), координат  $x_k$  и комплексных амплитуд  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , т. е. к решению системы нелинейных уравнений с неизвестным числом неизвестных. Для решения этой задачи приходится разрабатывать свои методы, так как такого рода системы в классической математике не рассматривались.

В данной работе всюду  $\delta$ -функция в области  $D$  определяется приведенным выше формальным соотношением для любой непрерывной функции  $r(x)$ . Аналогично определяются производные  $\delta^{(k)}(x)$ :

$$\int_D \delta^{(k)}(x - \xi) r(x) dx = (-1)^k r^{(k)}(\xi), \quad \xi \in D,$$

для класса функций  $r(x)$ , непрерывных в  $D$  со своими производными до порядка  $k$  включительно. Часто используемые операторные соотношения, выражающие свойства  $\delta$ -функций:  $\delta(-x) = \delta(x)$ ,  $\delta(cx) =$

$= |c|^{-1} \delta(x), c = \text{const}, x\delta(x) = 0, \delta(x) + x\delta'(x) = 0, a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x), \int_D \delta^2(x) dx = c_1 (c_1 - \text{произвольная постоянная})$  и другие понимаются в смысле данных выше определений, т. е. эти соотношения приобретают смысл только после интегрирования их с достаточно гладкими функциями.

**2. Задача восстановления функций-сигналов по конечному множеству данных.** Рассматривается класс сигналов [58], представимых формулой

$$f(z) = \int_D g(z, x) u(x) dx, \quad z \in G, \quad (1.2)$$

где  $D \in E^{n_1}, G \subset E^{n_2}$  — области значений  $x \in E^{n_1}$  и  $z \in E^{n_2}$ ;  $u(x) \in L_2[D]$  — комплекснозначная «спектральная функция» сигнала  $f(z)$ ;  $g(z, x)$  — комплекснозначное ядро, определенное и непрерывное в  $G \times D$ .

Величину

$$E_f = \int_D |u(x)|^2 dx < \infty \quad (1.3)$$

назовем энергией сигнала  $f(z)$ .

Изучаются задача восстановления сигнала по конечному числу его значений  $y_1, \dots, y_n$  в точках  $z_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $z_j \in G$ :

$$y_j = f(z_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

которая эквивалентна задаче решения системы интегральных уравнений

$$y_j = \int_D g(z_j, x) u(x) dx, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

и задача восстановления сигнала по значениям  $f(z_j)$  и его производных  $f^{(q)}(z_r)$  в тех же или иных точках, эквивалентная системе интегральных уравнений

$$f^{(q)}(z_r) = \int_D g_{z_r}^{(q)}(z_r, x) u(x) dx, \quad q, r = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

С помощью очевидных переобозначений системы (1.4) и (1.5) приводятся к системе (1.1).

**3. Псевдорешения и псевдообратные операторы.** Перепишем систему (1.1) в операторной форме

$$y = Gu, \quad (1.6)$$

где  $G$  — линейный интегральный оператор вида

$$G = \int_D g(x) \cdot dx : L_2[D] \rightarrow C^n,$$

$$g(x) = [g_1(x), \dots, g_n(x)]^T.$$

Поскольку  $G$  не имеет обратного оператора, введем понятие псевдорешения для уравнения (1.6) и псевдообратного оператора  $G^-$  к оператору  $G = G^- : C^n \rightarrow L_2[D]$ .

Функция  $\hat{u}(x) \in L_2[D]$  называется псевдорешением уравнения (1.6), если она минимизирует невязку

$$\|Gu - y\| \rightarrow \inf, \quad (1.7)$$

и среди всех функций, минимизирующих эту невязку (1.7), имеет минимальную норму  $\|u(x)\|$ . Оператор  $G^- : C^n \rightarrow L_2[D]$ , удовлетворяющий равенству

$$\hat{u}(x) = G^-y, \quad (1.8)$$

называется псевдообратным.

Поскольку система (1.1) всегда имеет бесчисленное множество решений, то невязка (1.7) достигает минимума на бесчисленном множестве функций  $u(x)$ . Именно поэтому для выбора псевдорешения  $\hat{u}(x)$  нужно из бесчисленного множества  $u(x)$ , минимизирующих (1.7), выбрать то, которое имеет минимальную норму  $\|u(x)\|$ . В качестве норм  $\|u(x)\|$  будем выбирать нормы  $L_2[D]$ ,  $L_1[D]$  и  $L_\infty[D]$  и различать псевдорешение  $\hat{u}_2(x)$  по норме  $L_2[D]$ ,  $\hat{u}_1(x)$  — по норме  $L_1[D]$  и  $\hat{u}_\infty(x)$  — по норме  $L_\infty[D]$ .

4. Псевдорешение  $\hat{u}_2(x)$  и псевдообратный оператор  $G_2^-$ . Для отыскания псевдорешения  $\hat{u}_2(x)$  рассмотрим множество  $K_2(l)$  точек  $\xi$  в  $C^n$  с координатами

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$

$$\xi_k = \int_D g_k(x) u(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

при условии, что

$$\int_D |u(x)|^2 dx \leq l^2. \quad (1.9)$$

Очевидно, множество  $K_2(l)$  является выпуклым, замкнутым, ограниченным, центрально-симметричным. С целью отыскания его границы найдем вначале опорные гиперплоскости к  $K_2(l)$ , для чего рассмотрим цепочку неравенств

$$\left| \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k \right| = \left| \int_D \left( \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right) u(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \left( \int_D \left| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_D |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq l \left( \int_D \left| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Здесь  $\beta_k$  — произвольные комплексные числа, определяющие нормаль к гиперплоскости. Знак равенства в рассмотренной цепочке

реализуется только функциями  $u(x)$  вида

$$u(x) = l \left( \sum_{k=1}^n \bar{\beta}_k \bar{g}_k(x) \right) / \left( \int_D \left| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.10)$$

поэтому точка  $\xi$ , принадлежащая одновременно к множеству  $K_2(l)$  и опорной к нему гиперплоскости

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k = l \left( \int_D \left| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

соответствует функции  $u(x)$  только вида (1.10). Отсюда следует условие существования решения системы (1.1) на классе функций  $u(x) \in L_2[D]$ , удовлетворяющих дополнительному условию (1.9): если  $\xi \in K_2(l)$ , то система (1.1) имеет решение, при этом если  $\xi \in \partial K_2(l)$ , то это решение единственное и только вида (1.10). Если же  $\xi \notin K_2(l)$ , то система (1.1) не имеет решения, удовлетворяющего условию (1.9).

Множества  $K_2(l)$ , соответствующие различным значениям  $l$ , гомотетичны с центром гомотетии в начале координат. Поэтому для любой точки  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  найдется  $l$  такое, что  $y \in \partial K_2(l)$ , и эта точка соответствует функции  $u(x)$  только вида

$$u(x) = g^*(x) d, \quad (1.11)$$

где  $d = (d_1, \dots, d_n)^T$  — вектор-столбец, удовлетворяющий уравнению

$$y = \int_D g(x) g^*(x) dx. \quad (1.12)$$

Если ввести обозначение  $K = \int_D g(x) g^*(x) dx$ , то уравнение (1.12) можно переписать в виде

$$Kd = y \quad (1.13)$$

и найти  $d = K^{-1}y$ , если  $\det K \neq 0$ . В противном случае, следует рассмотреть уравнение

$$(K + \alpha I) d = y, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (1.14)$$

близкое к уравнению (1.13), и найти  $d_\alpha = (K + \alpha I)^{-1} y$ . Тогда

$$u_\alpha(x) = g^*(x) (K + \alpha I)^{-1} y,$$

и псевдорешение системы (1.1) имеет вид

$$\hat{u}_2(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(x) (K + \alpha I)^{-1} y. \quad (1.15)$$

В существовании предела (1.15) можно убедиться, минимизируя функционал Лагранжа для задачи (1.7):

$$\mathcal{L}(u, \alpha) = \left| y - \int_D g(x) u(x) dx \right|^2 + \alpha \int_D |u(x)|^2 dx.$$

Норма найденного псевдорешения легко вычисляется:

$$\begin{aligned} E &= \int_D \hat{u}_2^*(x) \hat{u}_2(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_D \hat{u}_2^*(x) g^*(x) dx (K + \alpha I)^{-1} y = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} y^* (K + \alpha I)^{-1} y. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В заключение остается записать явное выражение для псевдообратного оператора  $G_2^-$  к оператору  $G$ :

$$G_2^- = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(x) (K + \alpha I)^{-1}.$$

5. Псевдорешение  $\hat{u}_{-1}(x)$  и псевдообратный оператор  $G_{-1}^-$ . Для отыскания псевдорешения  $\hat{U}_{-1}(x)$  рассмотрим множество  $K_{-1}(l)$  точек  $\xi$  вида

$$\xi = \langle g, u \rangle = \int_D \left[ g(x) u_0(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} u_1(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} u_2(x) \right] dx, \quad (1.17)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $g(x) \in \overset{0}{W}_2^1(D)$ ,  $u(x) \in W_2^{-1}(D)$ ,  $u_i(x) \in L_2(D)$ ,  $i = 0, 1, 2$  при условии, что

$$\|u\|_{W_2^{-1}(D)} = \sup_{v \in W_2^1(D)} \frac{(u, v)}{\|v\|_{W_2^1(D)}} \leq l. \quad (1.18)$$

При определении билинейной формы  $\langle g, u \rangle$  использовалось то, что всякий элемент  $u$  из  $W_2^{-m}(D)$  может быть представлен (не единственным образом) в виде

$$u = \sum_{|p| \leq m} D^p u_p, \quad u_p \in L_2(D). \quad (1.19)$$

Нетрудно убедиться, что множество  $K_{-1}(l)$  выпукло, замкнуто и обладает центральной симметрией. Для построения опорных гиперплоскостей рассмотрим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \beta_k \zeta_k \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n \beta_k \zeta_k \right| = \left| \left\langle \sum_{k=1}^n \beta_k g_k, u \right\rangle \right| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\|_{W_2^1(D)} \|u\|_{W_2^{-1}(D)} \leq l \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\|_{W_2^1(D)}. \end{aligned}$$

Здесь использовано обобщенное неравенство Коши — Буняковского.

Нетрудно убедиться, что в предыдущей цепочке неравенств знак равенства реализуется только функциями вида

$$u(x) = \overline{\sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x)} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \overline{\sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x)} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \overline{\sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x)} \in W_2^{-1}(D). \quad (1.20)$$

Действительно, так как

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \beta_k g_k, u \right\rangle = \int_D \left[ \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) u_0(x) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right) u_1(x) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right) u_2(x) \right] dx,$$

то, выбирая в качестве функций  $u_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) в представлении (1.19) при  $m = 1$  выражения вида

$$u_0(x) = \kappa \overline{\sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x)}, \quad u_1(x) = -\kappa \overline{\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right)}, \\ u_2(x) = -\kappa \overline{\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right)},$$

где

$$\kappa = l / \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\|_{W_2^1(D)},$$

после несложных преобразований получаем

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \beta_k g_k, u \right\rangle = l \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\|_{W_2^1(D)},$$

что и требовалось доказать.

Повторяя приведенные выше рассуждения для случая  $u(x) \in L_2(D)$ , убеждаемся, что для любой точки  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  найдется наименьшее значение  $l$  такое, что  $y \in \partial K_{-1}(l)$ , и эта точка соответствует функции  $u(x)$  только вида

$$u(x) = G^*(x) d,$$

где

$$G(x) = \left[ g(x) - \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_2^2} \right] \in [W_2^{-1}(D)]^n, \quad d$$

есть векторы-столбцы с компонентами

$$g_k(x) - \frac{\partial^2 g_k(x)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_k(x)}{\partial x_2^2}, \quad d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

соответственно. Вектор  $d$  является решением уравнения

$$y = \langle g, u \rangle = \int_D \left[ g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} \right] \times \\ \times \left[ g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} \right]^* dx. \quad (1.21)$$

Здесь  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  вектор-столбцы.

Если ввести обозначение  $K = [k_{ij}]_{i,j=1}^n$ ,



где

$$k_{i_i} = \int_D \left[ g_i(x) + \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_2} \right] \left[ g_i(x) + \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_2} \right] dx,$$

то уравнение (1.21) можно переписать в виде

$$Kd = y. \quad (1.22)$$

Таким образом, мы пришли к ситуации, рассмотренной ранее, когда  $u(x) \in L_2(D)$ . Поэтому нетрудно убедиться, что остаются в силе все рассуждения по поводу построения нормального псевдорешения уравнения (1.22), которое будет иметь вид

$$\hat{u}_{-1}(x) = g^*(x) G_{-1}^{-1} y \quad (1.23)$$

с нормой  $E^{1/2} = \{y^* G_{-1}^{-1} y\}^{1/2}$ . Здесь  $G_{-1}^{-1}$  — оператор, псевдообратный к оператору  $G$  из (1.22). Для нахождения устойчивого псевдообратного решения можно применить ту же регуляризацию, которая применялась ранее.

*Замечание.* Изложенные результаты легко распространяются на случай  $u(x) \in W_2^{-m}(D)$ , где  $m$  — натуральное число. Это значительно расширяет класс полей, включая и  $\delta$ -образные, что особенно важно на практике.

Среди псевдорешений (1.23) содержатся ( $m \geq 2$ ) псевдорешения вида

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^J A_i \delta(x - x_i),$$

где  $J$ ,  $A_i$ ,  $x_i$  удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^J A_i g(x_i) = y.$$

**6. Псевдорешение  $\hat{u}_\infty(x)$  и псевдообратный оператор  $G_\infty^-$ .** Для отыскания псевдорешения  $\hat{u}_\infty(x)$  рассмотрим множество  $K_\infty(l)$  точек (1.17) при условии, что

$$\max_{x \in D} |u(x)| \leq l. \quad (1.24)$$

Как  $K_2(l)$  и  $K_1(l)$ , множество  $K_\infty(l)$  выпуклое, замкнутое, ограниченное и центрально-симметричное. Для построения его опорных гиперплоскостей рассмотрим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \beta_k \bar{z}_k \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n \beta_k \bar{z}_k \right| = \left| \int_D \left( \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right) u(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_D \left| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right| |u(x)| dx \leq l \int_D \left| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right| dx. \end{aligned}$$

Знак равенства в этой цепочке неравенств реализуется только функциями  $u(x)$  вида

$$u(x) = l \exp \left\{ -i \arg \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\}. \quad (1.25)$$

Уравнения опорных гиперплоскостей к  $K_\infty(l)$  имеют вид

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \beta_k \zeta_k = \pm l \int_D \left| \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right| dx.$$

Поскольку граничные точки множества  $K_\infty(l)$  принадлежат одновременно и опорным гиперплоскостям к множеству  $K_\infty(l)$ , то они соответствуют только функциям  $u(x)$  вида (1.25) и имеют координаты

$$\zeta_m = l \int_D g_m(x) \exp \left\{ -i \arg \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\} dx, \quad m = 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

Отсюда очевидным образом следуют условия совместности системы (1.1) на классе функции  $u(x) \in L_2[D]$ , удовлетворяющих условию (1.24): если  $\zeta \in K_\infty(l)$ , то система (1.1) имеет решение, при этом если  $\zeta \in \partial K_\infty(l)$ , то это решение единственное и только вида (1.25). Если же  $\zeta \notin K_\infty(l)$ , то система (1.1) не имеет решения, удовлетворяющего условию (1.24). Параметры  $l, \beta_k, k = 1, \dots, n$ , в (1.25) удовлетворяют системе уравнений

$$\zeta = l \int_D g(x) \exp \left\{ -i \arg \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\} dx. \quad (1.27)$$

Отыскание решений системы (1.27) связано с определенными трудностями и может быть найдено только численными методами [31, 33, 34].

Множества  $K_\infty(l)$ , соответствующие различным  $l$ , гомотетичны с центром гомотетии в начале координат. Поэтому для любой точки  $y \in C^n$  найдется такое  $l$ , что  $y \in \partial K_\infty(l)$ , и эта точка соответствует только функции  $u(x)$  вида (1.25) с параметрами  $l$  и  $\beta_k$ , удовлетворяющими системе уравнений (1.27). Отсюда следует, что система (1.1) имеет решение, минимизирующее норму  $u(x)$  из  $L_\infty[D]$ , только вида (1.25), поэтому псевдорешение  $\hat{u}_\infty(x)$  имеет только вид

$$\hat{u}_\infty(x) = l \exp \left\{ -i \arg \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \right\}, \quad (1.28)$$

где  $l$  и  $\beta_k, k = 1, \dots, n$  ( $\beta_1 = 1$ ) удовлетворяют системе (1.27).

Записать оператор  $G_\infty^-$ , псевдообратный к  $G$ , в явном виде не удается.

**7. Методы определения параметров псевдорешений  $\hat{u}_i(x)$  и  $\hat{u}_\infty(x)$ .** Задача отыскания решений системы (1.22) и (1.27) относится к числу труднейших задач современной математики и разрешима только численными методами. Для решения систем (1.22) создано большое количество эвентуральных методов, пригодных для конкретных случаев, чрезвычайно важных в приложениях [34]. При создании общего подхода к решению систем (1.22) приходится сталкиваться, прежде всего, с задачей определения количества неизвестных. Затем нужно отделить корни и потом найти их с нужной точностью. Остановимся на одном достаточно общем подходе к решению систем (1.22), когда область  $D$  одномерна.

Задача оценки количества  $N$  дельта-функций Дирака, координат  $\xi_j$  и амплитуд  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , у функции

$$u(x) = \sum_{j=1}^N A_j \delta(x - \xi_j) \quad (1.29)$$

решается анализом системы уравнений

$$y_k = \sum_{j=1}^N A_j g_k(\xi_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.30)$$

в предположении аналитичности характеристик направленности

$$g_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ki} x^i, \quad (1.31)$$

$$\beta_{ki} = \frac{1}{k!} g_k^{(i)}(0), \quad i = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, n.$$

Если разложение (1.31) подставить в (1.30) и ввести обозначения

$$a_i = \sum_{j=1}^N A_j \xi_j^i, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (1.32)$$

то получится система уравнений

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ki} a_i, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.33)$$

с бесконечным количеством неизвестных. Считая, что  $N \ll n$ , и ограничиваясь в разложениях (1.31) первыми  $J$  членами, получаем усеченную систему (1.33), записанную в матричной форме

$$y = Ba, \quad (1.34)$$

где  $a = [a_0, a_1, \dots, a_J]^T$ ,  $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ ,  $B = [\beta_{ki}]_{k=1, i=1}^{n, J}$ , и ее псевдорешение по норме из  $l_2$

$$a = \lim_{\alpha \rightarrow +0} B^* (BB^* + \alpha I)^{-1} y. \quad (1.35)$$

Здесь  $B^*$  — матрица, эрмитово-сопряженная с матрицей  $B$ ;  $I$  — единичная матрица размера  $n \times n$ .

Компоненты найденного вектора  $a$  позволяют оценить значение  $N$  и найти грубые оценки координат  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . С этой целью строится матрица

$$H = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (1.36)$$

и отыскивается ее ранг. Любой минор матрицы  $H$  порядка, большего  $N$ , равен нулю, так как согласно (1.32) раскладывается на сумму определителей, каждый из которых имеет по крайней мере два одинаковых столбца (число различных  $\xi_j$  равно  $N$ , а порядок опре-

делителя больше  $N$ ). В то же время главный минор матрицы  $H$

$$M_n = \det \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1} & a_N & \dots & a_{2N-1} \end{vmatrix} = A_1 A_2 \dots A_N \prod_{i < j < 2}^N (\xi_i - \xi_j)^2 \neq 0,$$

поэтому ранг матрицы  $H$  совпадает со значением  $N$ .

Вследствие того что оценки вектора  $a$  получены усечением рядов (1.31), т. е. внесением погрешностей, при вычислении ранга матрицы  $H$  приходится сталкиваться с серьезными трудностями. Для преодоления этих трудностей целесообразно найти собственные значения матрицы  $H$  и расположить их в порядке убывания. Если бы не было усечения рядов, то число отличных от нуля собственных значений равнялось бы  $N$ . Поскольку элементы матрицы  $H$  вычислены с погрешностями, то для определения  $N$  следует установить некоторый порог, чтобы пренебречь собственными значениями ниже этого порога. Этот порог устанавливается в ходе вычислительного эксперимента.

Когда значение  $N$  установлено, нетрудно найти грубые оценки координат  $\xi_j$  — величины  $\xi_j^0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , которые являются нулями многочлена:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{N-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N & \xi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_N & a_{N+1} & \dots & a_{2N-1} & \xi^N \end{vmatrix} = 0. \quad (1.37)$$

Найденные таким образом оценки  $\xi_j^0$  можно уточнить, если предположить аналитичность характеристик направленности  $g_k(x)$  в окрестностях точек  $\xi_j^0$ , т. е. если предположить справедливость разложений

$$g_k(x_j) = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{kjq} (x_j - \xi_j^0)^q, \quad (1.38)$$

$$\alpha_{kjq} = \frac{1}{q!} g_k^{(q)}(\xi_j^0), \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Если в разложениях (1.38) ограничиться  $Q$  членами ( $Q \geq 1$ ), то система (1.30) может быть преобразована к виду

$$y_k = \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^Q \alpha_{kjq} A_j \Delta x_j^q, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\Delta x_j = x_j - \xi_j^0, \quad j = 1, \dots, N,$$

или, после введения обозначений

$$Z_{jq} = A_j \Delta x_j^q, \quad j = 1, \dots, N, \quad q = 0, \dots, Q,$$

к виду

$$y_k = \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^Q \alpha_{kjq} Z_{jq}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.39)$$

Если ввести блочные матрицы

$$Z = [Z_1 : Z_2 : \dots : Z_N]^T, \\ Z_j = [Z_{j0}, Z_{j1}, \dots, Z_{jq}]^T, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nN} \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{kj} = [\alpha_{kj0}, \alpha_{kj1}, \dots, \alpha_{kjQ}], \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N,$$

то систему (1.39) можно переписать в виде

$$y = \alpha Z \quad (1.40)$$

и найти ее псевдорешение

$$\hat{Z} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha^* (\alpha \alpha^* + \omega I)^{-1} y. \quad (1.41)$$

Зная  $\hat{Z}$ , а следовательно,  $\hat{Z}_{jq}$ ,  $q = 0, 1, \dots, Q$ , нетрудно найти  $A_j = \hat{Z}_{j0}$  и поправки координат

$$\Delta x_j = \frac{1}{Q} \left[ \frac{\hat{Z}_{j1}}{\hat{Z}_{j0}} + \frac{\hat{Z}_{j2}}{\hat{Z}_{j1}} + \dots + \frac{\hat{Z}_{jq}}{\hat{Z}_{j,q-1}} \right],$$

поэтому уточненные координаты можно записать в виде

$$\xi_j^{(1)} = \xi_j^{(0)} + \Delta x_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.42)$$

Далее, приняв в качестве отправной точку  $\xi_j^{(1)}$ , с помощью итерации можно построить серию дальнейших уточнений координат по описанному алгоритму, пока значение  $\Delta x_j$  не станет пренебрежимо малым.

**8. Итерационные методы решения нелинейных систем.** Классические итерационные методы решения нелинейных алгебраических и трансцендентных систем ориентированы на нормальные системы, когда число неизвестных совпадает с числом уравнений с невырожденными якобианами. Системы для определения параметров квазирешений зачастую не удовлетворяют этим условиям, поэтому возникает необходимость в создании новых итерационных методов, обладающих высокой скоростью сходимости, ориентированных не на нормальные системы, а на произвольные, и не требующих невырожденности якобианов системы [32, 34].

Рассмотрим задачу отыскания решения  $x^*$  системы нелинейных уравнений вида

$$F(x) = 0, \quad (1.43)$$

где  $F(x)$  —  $n$ -мерная вектор-функция  $m$ -мерной переменной  $x$  ( $x = [x_1, \dots, x_m]^T$ ,  $F(x) = [F_1(x), \dots, F_n(x)]^T$ ). Предполагается, что оператор  $F(x): E^m \rightarrow E^n$  дифференцируем в смысле Фреше нужное число раз и что система (1.43) имеет единственное решение  $x^*$  в некоторой области  $\|x - x^*\| \leq \eta$ ,  $\eta > 0$ .

Результаты работы [34] с помощью псевдообратных матриц и квазирешений линейных систем допускают обобщение на случай  $m \neq n$  и вырождение якобиана отображения  $x \rightarrow F(x)$ . Для этого систему (1.43) преобразуем к виду

$$x = x + [\Psi_1 A_1 + \dots + \Psi_R A_R] F(x). \quad (1.44)$$

Здесь матрицы-функции

$$\Psi_r = \Psi_r(x) = [\Psi_{ij}^r(x)]_{i=1, j=1}^{m, n}, \quad r = 1, \dots, R,$$

своими элементами имеют функции  $m$  переменных, дифференцируемых  $(L+1)$  раз в смысле Фреше;  $A_r = [a_{ij}]_{i=1, j=1}^{r, n}$  — числовые матрицы, выбираемые для каждого шага итерационной процедуры так, чтобы все производные Фреше до  $L$ -го порядка включительно оператора

$$\Phi(x) = x + [\Psi_1 A_1 + \dots + \Psi_R A_R] F(x)$$

обращались в нуль в точках  $x^0, \dots, x^k, \dots$  последовательных приближений к решению  $x^*$ :

$$\Phi^{(l)}(x^k) = 0, \quad l = 1, \dots, L; \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.45)$$

Выбирая  $\Psi_r, A_r$  и область  $\|x - x^*\| \leq \eta$ , следует проследить, чтобы  $\Phi^{(l)}(x)$  существовали в этой области и были равномерно непрерывными в ней.

Очевидно, оператор  $\Phi(x)$  изменяется от точки  $x^k$  к точке  $x^{k+1}$  так, что выполняются равенства (1.45). Причем для построения этого оператора в каждой точке  $x_k, k = 0, 1, \dots$ , приходится находить квазирешения [34] линейных относительно  $a_{ij}$  систем уравнений, вообще, с прямоугольными и плохо обусловленными матрицами.

Среди решений системы (1.44) содержатся и решения системы (1.43). Если начальное приближение  $x^0$  выбрано в достаточно малой окрестности искомого решения  $x^*$ , то в силу непрерывности по рассматриваемой норме оператора  $\Phi'(x)$  и равенств (1.45) уравнение

$$x = \Phi(x)$$

будет иметь единственное решение в этой окрестности и последовательные приближения

$$x^{r+1} = \Phi(x^r), \quad r = 0, 1, \dots, \quad (1.46)$$

будут сходиться к нему.

Скорость сходимости последовательных приближений можно оценить следующим образом. Поскольку  $x^* = \Phi(x^*)$  и  $x^{r+1} = \Phi(x^r)$ ,

$$x^{r+1} - x^* = \Phi(x^r) - \Phi(x^*).$$

По формуле Тейлора для оператора  $\Phi(x)$  получается

$$\omega(x^*) = \Phi(x^r) + \Phi'(x^r)(x^* - x^r) + \frac{1}{2!} \Phi''(x^r)(x^* - x^r, x^* - x^r) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x^r)(x^* - x^r, \dots, x^* - x^r) + \omega(x^r, x^* - x^r),$$

где

$$\|\omega(x^r, x^* - x^r)\| = O(\|x^* - x^r\|^{k+1}).$$

Поэтому, учитывая равенства (1.45), нетрудно получить, что

$$\|x^{r+1} - x^*\| = O(\|x^* - x^r\|^{L+1}).$$

Следовательно, процедура (1.46) является итерационным методом  $(L + 1)$ -го порядка, скорость сходимости которого иногда, как показывает вычислительный эксперимент, существенно зависит от выбора матриц  $\Psi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, R$ . Однако решение вариационной задачи оптимального выбора  $\Psi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, R$ , даже для одномерной задачи приводит к серьезным трудностям.

Отметим некоторые частные случаи, естественным образом обобщающие классический метод касательных (Ньютона), касательных гипербола (Салехова), касательных парабол (Чебышева) и др.

Пусть  $L = 1$ ,  $\Psi_1 = I_m$ , где  $I_m$  — единичная матрица  $m \times m$ , и

$$A_1 = [a_{ij}]_{i=1, j=1}^{m,n}.$$

Тогда система (1.45) принимает вид

$$A_1 y(x) = -I_m,$$

где  $y(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial(x)}$  — якобиан системы (1.43). Ее псевдорешение имеет вид

$$A_1 = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (y^*(x) y(x) + \alpha I_m)^{-1} y^*(x), \quad (1.47)$$

где  $y^*(x)$  — матрица, эрмитово-сопряженная с якобиевой матрицей, и итерационная процедура, являющаяся обобщением процедуры Ньютона, реализуется алгоритмом

$$x^{r+1} = x^r - \lim_{\alpha \rightarrow 0} (y^*(x^r) y(x^r) + \alpha I_m)^{-1} y^*(x^r) F(x^r), \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.48)$$

В случае  $m = n$  (система (1.43) нормальна) и  $\det y(x^r) \neq 0$  равенство (1.48) превращается в итерационную процедуру Ньютона

$$x^{r+1} = x^r - y^{-1}(x^r) F(x^r), \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.49)$$

Итерационная процедура (1.48) дает возможность «весовой» обработки уравнений системы (1.43) для отыскания ее решения, если эта система несовместна. Достаточно каждому уравнению системы в качестве множителя приписать вес  $P_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , который характеризует достоверность информации в  $i$ -м уравнении. Иллюстрируем это на примере решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &= 0, \\ xy - 1 &= 0, \\ x - 2y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

приписывая уравнениям веса  $P_1, P_2, P_3$ . В зависимости от значений  $P_1, P_2$  и  $P_3$  меняется решение системы (табл. 5). Чем выше вес уравнения, тем ближе к соответствующей кривой решение.

Таблица 5

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$x$	$y$
0,1	0,1	10	1,28653346	0,643270059
1	1	0	1,000006053	0,9999939468
100	100	1	1,034462036	0,6948009742
1	10	10	1,403524635	0,7042038988
10	0	1	1,264911064	0,6324555320
10	1	10	1,265012001	0,6328841578
10	10	10	1,272981370	0,6647237235
0	1	100	1,405869808	0,7029351522
5	2	4	1,26518258	0,6414251034
4	5	4	1,276232149	0,6767328308
1	1	10	1,286377557	0,6435208802
0	1	2	1,414213597	0,7071067984

Подробное обобщение методов касательных гипербол и касательных парабол приведено в работе [34].

**9. Оценка погрешности восстановления функций-сигналов по конечному множеству данных.** Рассмотрим задачу оценки погрешности восстановления функции-сигнала (см. формулу (1.2)) по отсчетам  $y_1, \dots, y_n$  в точках  $d_1, \dots, d_n$  функциями

$$f_0(z) = \int_D g(z, x) \hat{u}_2(x) dx = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_D g(z, x) g^*(x) dx (K + \alpha I)^{-1} y = \lim_{\alpha \rightarrow 0} b^*(z) (K + \alpha I)^{-1} y, \quad (1.51)$$

где  $b^*(z) = \int_D g(z, x) g^*(x) dx$  — вектор-строка базисных функций. При этом будем предполагать, что восстанавливаемая функция-сигнал  $f(z)$  обладает энергией

$$E_f > E_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} y^* (K + \alpha I)^{-1} y.$$

При  $E_f = E_0$  задача восстановления имеет единственное решение (1.51), при  $E_f < E_0$  задача восстановления решений не имеет. При  $E_f > E_0$  ( $E_f \leq l^2$ ) задача восстановления имеет бесчисленное множество решений, поэтому возникает вопрос о возможной погрешности в точке  $z$  от замены  $f(z)$  функцией  $f_0(z)$  вида (1.51), т. е. вопрос об оценке значения

$$\gamma = \max_{f(z), E_f \leq l^2} |f(z) - f_0(z)|, \quad z \in G. \quad (1.52)$$

Для оценки (1.52) в предположении  $E_0 < E_f \leq l^2$  найдем множество значений в точке  $z$  функций  $f(z)$  вида (1.2), интерполирующих значения  $y_1, \dots, y_n$  в точках  $z_1, \dots, z_n$ . Это множество определяется нера-



$$\begin{vmatrix} l^2 K_{00} - |f(z)|^2 & l^2 K_{01} - \bar{y}_1 f(z) & \dots & l^2 K_{0n} - \bar{y}_n f(z) \\ l^2 K_{10} - y_1 \bar{f}(z) & l^2 K_{11} - |y_1|^2 & \dots & l^2 K_{1n} - \bar{y}_n y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l^2 K_{n0} - y_n \bar{f}(z) & l^2 K_{n1} - \bar{y}_1 y_n & \dots & l^2 K_{nn} - |y_n|^2 \end{vmatrix} \geq 0, \quad (1.53)$$

где

$$K_{00} = \int_D g(z, t) \overline{g(z, t)} dt, \quad \bar{K}_{j0} = K_{0j} = \int_D g(z, t) \overline{g(z_j, t)} dt, \\ j = 1, \dots, n.$$

Введем обозначение  $y_0 = f(z)$  и разложим определитель в неравенстве (1.52) на сумму  $2^{n+1}$  определителей, так как каждый его столбец является суммой двух вектор-столбцов. Среди  $2^{n+1}$  определителей не более  $(n+2)$  их отличны от нуля — это те, которые имеют не более одного  $y$ -столбца, состоящего из элементов  $y_i y_j$ . Остальные определители обращаются в нули, поскольку содержат не менее двух  $y$ -столбцов, которые всегда коллинеарны. Сумма нужным образом упорядоченных  $(n+2)$  определителей с вынесенными за знак определителя множителями представляет собой разложение по элементам верхней строки определителя

$$l^{2n} S = l^{2n} \begin{vmatrix} l^2 & \bar{y}_0 & \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_n \\ y_0 & K_{00} & K_{01} & \dots & K_{0n} \\ y_1 & K_{10} & K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & K_{n0} & K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix},$$

и поэтому неравенство (1.52) эквивалентно неравенству  $S \geq 0$ .

Используя тождество Сильвестра для миноров  $y_0, \bar{y}_0, l^2$  и  $K_{00}$  взаимного с  $S$  определителя, получаем

$$S = M(l^2) M(K_{00}) - M(y_0) M(\bar{y}_0),$$

что эквивалентно неравенству

$$|y_0 - f_0(z)| \leq (l^2 - E_0)(K_{00} - E_q), \quad (1.54)$$

где

$$E_q = \lim_{\alpha \rightarrow 0} q^*(z) (K + \alpha I)^{-1} q(z),$$

$$q(z) = [q_1(z), \dots, q_n(z)]^T,$$

$$q_k(z) = K_{k0} = \int_D g(z, x) \overline{g(z_j, x)} dx.$$

Оценка (1.54) точна в том смысле, что существует функция  $f$  (з) вида (1.2) с энергией  $E_f = l^2$ , которая в точках  $z_j$  принимает значения  $y_j, j = 1, \dots, n$ , и для которой

$$|f(z) - f_0(z)| = \sqrt{E_f - E_0} \sqrt{K_{00} - E_q}, \quad z \in G,$$

эта функция соответствует спектру вида

$$u(x) = A_0 g(z, t) + \sum_{j=1}^n A_j \overline{g(z_j t)}$$

с выбранными надлежащим образом  $A_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , и имеет вид

$$f(z) = A_0 K_{00} + \sum_{j=1}^n A_j K_{0j}.$$

Полученное неравенство для точной оценки погрешности восстановления функций-сигналов по конечному числу отсчетов указывает на пути уменьшения погрешности. Первый путь связан с уменьшением диссипации (рассеяния) энергии  $E_t - E_0$ , второй — с выбором отсчетов  $z_j$ , минимизирующих значение  $Q(z_1, \dots, z_n) = K_{00} - E_0$ .

**10. О погрешности решения задачи интерпретации.** Оценим величину

$$|\hat{u}_2(x) - u(x)|,$$

где

$$\hat{u}_2(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} q^*(x) (K + \alpha I)^{-1} y,$$

$$u(x) = \int_D \delta(\xi - x) u(\xi) d\xi, \quad y = \int_D g(\xi) u(\xi) d\xi.$$

Используя неравенство Шварца, нетрудно получить

$$\begin{aligned} |\hat{u}_2(x) - u(x)| &= \left| \int_D \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(x) (K + \alpha I)^{-1} g(\xi) u(\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_D \delta(\xi - x) u(\xi) d\xi \right| \leq \int_D \left| \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(x) (K + \alpha I)^{-1} g(\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \delta(\xi - x) \right| |u(\xi)| d\xi \leq \left[ \int_D \left| \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(x) (K + \alpha I)^{-1} g(\xi) - \delta(\xi - x) \right|^2 d\xi \right]^{1/2} \times \\ &\quad \times \left[ \int_D |u(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \leq l \{ \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(x) (K + \alpha I)^{-1} K (K + \alpha I)^{-1} g(x) - \\ &\quad - 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(x) (K + \alpha I)^{-1} g(x) + C \}, \end{aligned}$$

где  $C = \text{const}$ ,  $C = \int_D \delta^2(\xi - x) d\xi$ .

Если матрица  $K$  невырождена, то

$$|\hat{u}_2(x) - u(x)| \leq l [C - g^*(x) K^{-1} g(x)].$$

Отсюда следуют и интегральные оценки

$$\int_D |\hat{u}_2(x) - u(x)| \leq l [C \text{mes } D - \text{tr} I_n],$$

$$\int_D |\hat{u}_2(x) - u(x)|^2 \leq l^2 [C^2 \text{mes } D - (2C - 1) \text{tr} I_n].$$

Вопрос о вычислении произвольной постоянной  $C = \int_D \delta^2(x - \xi) dx$  пока остается открытым.

Точечной оценке  $|\hat{u}_2(x) - u(x)|$  можно придать иной вид:

$$\begin{aligned} g^*(x) K^{-1} g(x) &= \text{tr} g^*(x) K^{-1} g(x) = \\ &= \text{tr} (K^{-1} g(x) g^*(x)) = \text{tr} (K^{-1} K(x)), \end{aligned}$$

где

$$K(x) = g(x) g^*(x).$$

Если  $K = I$  (ортонормальная система характеристик направленности), то

$$|\hat{u}_2(x) - u(x)| \leq l \left[ C - \sum_{k=1}^n |g_k(x)|^2 \right].$$

**11. Максимально-энтропийная интерпретация и максимально-энтропийное восстановление.** Для простоты выкладок ограничимся случаем наблюдения вещественного неотрицательного поля  $u(x) > 0$ ,  $x \in D$ , рецепторами с вещественными характеристиками направленности  $g_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $x \in D$ . Рассмотрим задачу максимально-энтропийной интерпретации наблюдений по неполным данным, т. е. задачу отыскания решения системы (1.1), обладающего максимальной энтропией и максимизирующего функционал

$$\int_D \ln u(x) dx \rightarrow \max \quad (1.55)$$

при ограничениях

$$\int_D g_k(x) u(x) dx - y_k = 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad u(x) > 0, \quad x \in D. \quad (1.56)$$

Иными словами, найдем решение системы (1.56) с максимумом неопределенности, с использованием всей априорной информации, содержащейся в (1.56), без каких-либо гипотез о поведении этого решения.

Функционал Лагранжа для задачи (1.55) — (1.56) имеет вид

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \int_D \ln u(x) dx + \sum_{k=1}^n \lambda_k \left( \int_D g_k(x) u(x) dx - y_k \right), \quad (1.57)$$

где  $\lambda_k$  — множители Лагранжа, а его вариация по  $u(x)$  —

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(u + \xi \eta, \lambda) - \mathcal{L}(u, \lambda) = \\ &= \varepsilon \int_D \left[ \frac{1}{u(x)} + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x) \right] \eta(x) dx + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Поскольку для экстремальной функции  $u(x)$  коэффициент при  $\varepsilon$  должен быть равен нулю, а  $\eta(x)$  — произвольная функция,

получаем уравнение Эйлера для экстремали

$$\frac{1}{u(x)} = - \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x), \quad u(x) > 0,$$

или

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x)}, \quad (1.59)$$

где  $\beta_k$  находят из системы уравнения

$$\int_D \frac{g_k(x)}{\sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x)} dx = y_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

так, чтобы выполнялось неравенство  $\hat{u}(x) > 0, \quad x \in D$ .

Если  $g_k(x)$  — степенные или тригонометрические функции, то для неотрицательных на отрезках степенных и тригонометрических многочленов существуют специальные представления Лукача и Рисса — Фейера, существенно упрощающие решение рассматриваемой задачи.

Если рассматривается задача о максимально-энтропийном восстановлении сигналов

$$f(z) = \int_D g(z, x) u(x) dx$$

по отсчетам

$$f(z_j) = \int_D g(z_j, x) u(x) dx = y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.60)$$

то целевой функционал имеет вид

$$\int_G \ln |f(z)|^2 dx \rightarrow \max \quad (1.61)$$

при ограничениях

$$\int_D g(z_k, x) u(x) dx - y_k = 0. \quad (1.62)$$

Функционал Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \lambda) = & \int_G \ln \left| \int_D g(z, x) u(x) dx \right|^2 dz + \\ & + \sum_{k=1}^n \lambda_k \left( \int_D g(z_k, x) u(x) dx - y_k \right), \end{aligned} \quad (1.63)$$

его вариация

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(u, \lambda) = & \mathcal{L}(u + \varepsilon \eta, \lambda) - \mathcal{L}(u) = \\ = & \varepsilon \int_G \left[ \int_D \frac{2g(z, x) dx}{\int_D g(\xi, \xi) u(\xi) d\xi} + \sum_{k=1}^n \lambda_k g(z_k, x) \right] \eta(x) dx + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (1.64)$$

позволяют получить уравнение Эйлера для экстремали

$$\int_G \frac{g(z, x)}{\int_D g(z, \xi) u(\xi) d\xi} dz + \sum_{k=1}^n \lambda_k g(z_k, x) = 0. \quad (1.65)$$

Можно рассмотреть еще одно максимально энтропийное, оптимальное решение задачи восстановления, если воспользоваться неравенством

$$|f(z) - f_0(z)| \leq [(E_f - E_0)(K_{00} - E_0)]^{1/2}. \quad (1.66)$$

Функции  $f(z)$  и  $f_0(z)$  в точках  $z_1, \dots, z_n$  принимают одни и те же значения  $y_1, \dots, y_n$ . В точке  $z$  функция  $f_0(z)$  принимает значение из центра круга (1.66), а  $f(z)$  — любое значение из этого круга, не отдавая предпочтения ни одной точке. Поэтому можно считать распределение  $f(z)$  по этому кругу равномерным (максимально-энтропийным). Центр этого круга является усредненным значением  $f(z)$ .

**12. Оптимальная интерполяция и восстановление функций-сигналов по конечному множеству данных.** Задачу восстановления функции-сигнала

$$f(z) = \int_D g(z, x) u(x) dx, \quad z \in G, \quad (1.67)$$

рассмотрим как задачу оптимальной интерполяции. Здесь будем искать такую функцию ( $f, g, u$  — вещественные,  $y_k = f(z_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ )

$$\lambda(x, y_1, \dots, y_n) = \lambda x \simeq u(x),$$

чтобы соблюдалось равенство

$$\mathcal{L}(z) = \int_D g(z, x) \lambda(x) dx \simeq f(z).$$

Для характеристики процесса восстановления  $f(z)$  и  $u(x)$  введем величины

$$r(z, \mathcal{L}) = \sup |f(z) - \mathcal{L}(z)|,$$

$$\rho(z) = \inf r(z, \mathcal{L}), \quad z \in G,$$

$$T(\mathcal{L}) = \sup_{z \in G} r(z, \mathcal{L}).$$

Величина  $T(\mathcal{L})$  называется нормой погрешности  $r(z, \mathcal{L})$  на множестве значений  $z \in G$ . Функции  $\lambda_0(x)$  и  $\mathcal{L}_0(z)$  будем считать оптимальным восстановлением, если

$$\rho(z) = \inf_z \sup |f(z) - \mathcal{L}(z)| = \inf_z |f(z) - \mathcal{L}_0(z)|,$$

$$\mathcal{L}_0(z) = \int_D g(z, x) \lambda_0(x) dx.$$

Среди интерполирующих оптимальных функций  $\mathcal{L}_0(z)$  для (1.67), когда  $\|u(x)\|_2^2 \leq l^2 (\|u\|_1 \leq l, \|u\|_\infty \leq l)$ , существуют линейные

относительно  $y_k$  функции

$$L_0(z) = \sum_{k=1}^n y_k D_k(z).$$

Более того,

$$\rho(z) = \sup_{b(z)} |f(z)| \quad (1.68)$$

при условии  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$  и

$$\rho(z) = \sup_{f(z)} \left| f(z) - \sum_{k=1}^n y_k D_k(z) \right|.$$

Следовательно, для отыскания  $\rho(z)$  достаточно решить задачу математического программирования (1.68).

При ограничении  $\|u(x)\|_2^2 \leq l^2$  эта задача совпадает с задачей, рассмотренной в п. 9, и поэтому можно написать

$$|f(z)|^2 \leq l^2 (\det [K_{ij}]_0^n) / (\det [K_{ij}]_1^n),$$

$$\rho(z) = l (\det [K_{ij}]_0^n)^{1/2} / (\det [K_{ij}]_1^n)^{1/2},$$

$$K_{00} = \int_D g(z, x) \overline{g(z, x)} dx, \quad K_{0j} = \overline{K_{j0}} = \int g(z, x) \overline{g(z_j, x)} dx.$$

Для отыскания  $D_k(z)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , нужно найти

$$\varphi_k(\varepsilon, z) = \sup_{f(z_i) = \delta_{ik}\varepsilon} f(z)$$

и затем

$$D_k(z) = \frac{\partial \varphi_k(\varepsilon, z)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

т. е. сначала найти

$$\sup \left[ \int_D g(z, x) u(x) dx \right]$$

при ограничениях

$$\int_D g(z_i, x) u(x) dx = \delta_{ik}\varepsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из результатов п. 9 следует, что

$$\varphi_k(\varepsilon, z) = f_0(z) + (l^2 - E_0)^{1/2} (K_{00} - E_q)^{1/2},$$

где

$$f_0(z) = b^*(z) K^{-1} [\delta_{ik}\varepsilon]_{i=1}^n,$$

$$b(z) = \int_D g(z, x) [g(\overline{z_j}, x)]_{j=1}^n dx,$$

$$E_0 = [\delta_{ik}\varepsilon]_{i=1}^n K^{-1} [\delta_{ik}\varepsilon]_{i=1}^n = [K^{-1}]_{kk} \varepsilon^2,$$

$$E_q = b^*(z) K^{-1} b(z),$$

$$f_0(z) = b^*(z) K_{k-\text{столбец}}^{-1},$$

т. е.

$$\varphi_k(\varepsilon, z) = \varepsilon b^*(z) K_{k-\text{столбец}}^{-1} + (l^2 - \varepsilon^2 K_{kk}^{-1}) (K_{00} - b^*(z) K^{-1} b(z)).$$

Таким образом,  $D_k(z) = b^*(z) K_{k\text{-столбец}}^{-1}$  и

$$\mathcal{L}_0(z) = \sum_{k=1}^n y_k D_k(z) = b^*(z) K^{-1} y,$$

так как  $\mathcal{L}_0(z) = D(z) y$ , где  $D(z) = b^*(z) K^{-1}$ .

Следовательно,  $\mathcal{L}_0(z)$  совпадает с восстановлением по  $\hat{u}_2(x)$ . Аналогично решается задача с ограничениями на  $u(x)$  вида

$$\|u(x)\|_1 \leq l, \quad \|u(x)\|_\infty \leq l.$$

## § 2. Задача восстановления функций-сигналов и ее приложения

**Примеры.** Восстановление поля в раскрыве антенны по данным поля в дальней зоне. Пусть  $D$  — раскрыв (апертура) антенны,  $u(x)$ ,  $x \in D$  — распределение поля в раскрыве,  $x = (x_1, x_2)^T$ . Тогда поле  $f(z)$  в дальней зоне в точке  $z = (z_1, z_2)^T$  связано с полем в раскрыве  $D$  соотношением

$$f(z) = \int_D e^{iz^* x} u(x) dx. \quad (2.1)$$

Рассматривается задача восстановления поля  $u(x)$  в раскрыве  $D$  по данным  $y_k = f(z_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , которая сводится к задаче восстановления поля

$$\hat{u}(x) = g^*(x) K^{-1} y_k, \quad (2.2)$$

$$g^*(x) = [e^{-iz_1^* x}, e^{-iz_2^* x}, \dots, e^{-iz_n^* x}].$$

Имея в распоряжении восстановленное поле  $\hat{u}(x)$  в раскрыве, легко решить задачу интерполяции диаграммы направленности антенны

$$\hat{f}(z) = b^*(z, D) K^{-1} y_k, \quad (2.3)$$

где

$$b^*(z, D) = [b_1^*(z, D), \dots, b_n^*(z, D)],$$

$$b_k^*(z, D) = \int_D e^{i(z^* - z_k^*)x} dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $b_k^*(z, D)$  — базисные функции для раскрыва  $D$ . Если  $D$  — прямоугольник  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ , то

$$b_k^*(z, D) = 4 \frac{\sin(z_1 - z_1^k) a}{z_1 - z_1^k} \frac{\sin(z_2 - z_2^k) b}{z_2 - z_2^k},$$

если  $D$  — параллелограмм, ограниченный прямыми  $x_1 = \pm a$ ,  $x_2 = kx_1 = \pm b$ , то

$$b_k^*(z, D) = 4 \frac{\sin(z_2 - z_2^k) b}{z_2 - z_2^k} \frac{\sin[(z_1 - z_1^k) + K(z_2 - z_2^k)] a}{(z_1 - z_1^k) + k(z_2 - z_2^k)},$$

а если  $D$  — круг  $x_1^2 + x_2^2 \leq a^2$ , то

$$b_k^*(z, D) = 2\pi \int_0^a \left\{ \rho \mathcal{J}_0[\rho(z_1 - z_1^k)] /_0[\rho(z_2 - z_2^k)] + \right. \\ \left. + 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathcal{J}_{2n}[\rho(z_1 - z_1^k)] \mathcal{J}_{-n}[\rho(z_2 - z_2^k)] \right\} \alpha \rho,$$

где  $\mathcal{J}_m(x)$  — функция Бесселя.

Аналогично решается задача восстановления поля в раскрые по значениям производных диаграммы направленности в точках  $z_1, \dots, z_m$  [56, 60] и другие задачи синтеза линейных и плоских антенн [59].

**Плоская задача математической теории упругости.** В ней рассматривается задача восстановления внешних усилий на контуре  $\partial D$  по напряжениям в фиксированных точках односвязной области  $D$  внутри простого замкнутого контура  $\partial D$ . Напряжения  $X_y, Y_y$  и  $X_x$  в произвольной точке  $(x, y) \in D$  выражаются [56а] через распределение нормальных  $N(t)$  и касательных  $T(t)$  усилий на простом замкнутом контуре  $\partial G$  с помощью линейных интегральных операторов

$$X_y(x, y) = \int_{\partial D} [\varphi_N(x, y, t) N(t) + \varphi_T(x, y, t) T(t)] dt, \\ Y_y(x, y) = \int_{\partial D} [\psi_N(x, y, t) N(t) + \psi_T(x, y, t) T(t)] dt, \quad (2.4) \\ X_x(x, y) = \int_{\partial D} [\omega_N(x, y, t) N(t) + \omega_T(x, y, t) T(t)] dt.$$

Здесь  $\varphi_N(x, y, t)$ ,  $\psi_N(x, y, t)$ ,  $\omega_N(x, y, t)$ ,  $\varphi_T(x, y, t)$ ,  $\psi_T(x, y, t)$  и  $\omega_T(x, y, t)$  — ядра операторов, определяемые первой основной плоской задачей теории упругости.

Задача восстановления усилий  $N(t)$  и  $T(t)$  по заданным  $X_y^{(k)} = X_y(x_k, y_k)$ ,  $Y_y^{(k)} = Y_y(x_k, y_k)$ ,  $X_x^{(k)} = X_x(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , сводится к отысканию квазирешения системы интегральных уравнений

$$X_y^{(k)} = \int_{\partial D} [\varphi_N(x_k, y_k, t) N(t) + \varphi_T(x_k, y_k, t) T(t)] dt, \\ Y_y^{(k)} = \int_{\partial D} [\psi_N(x_k, y_k, t) N(t) + \psi_T(x_k, y_k, t) T(t)] dt, \\ X_x^{(k)} = \int_{\partial D} [\omega_N(x_k, y_k, t) N(t) + \omega_T(x_k, y_k, t) T(t)] dt,$$

которую в матричной форме можно переписать в виде

$$y = \int_{\partial D} G(t) \begin{bmatrix} N(t) \\ T(t) \end{bmatrix} dt, \quad (2.5)$$



где

[illegible]

Тогда псевдорешение типа  $\hat{u}_2(t)$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} N(t) \\ T(t) \end{bmatrix} = G^*(t) K^{-1} y, \quad (2.6)$$

где

$$K = \int_{\partial D} G(t) G^*(t) dt.$$

Аналогично, псевдорешение типа  $\hat{u}_1(t)$  является линейной комбинацией  $\delta$ -функций, количество  $Q$  которых, координаты  $r_j$  и амплитуды  $\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix}$  определяются системой уравнений

$$\begin{bmatrix} N(t) \\ T(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^o \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} \delta(t - \tau_i), \quad (2.7)$$

$$y = \sum_{i=1}^n [G(\tau_i)] \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix}.$$

Работа [56a] посвящена исследованию экстремальных напряжений для полуплоскости и круга. Теми же методами решен класс экстремальных задач для кругового диска, подверженного действию сосредоточенных сил.

Наконец, изложенными методами решена задача синтеза распределения внешней нагрузки при заданном поле напряжений для задач плоской теории упругости. В качестве примера в такой постановке рассмотрена задача для полуплоскости.

**Задачи теории оптимального управления. Финитное управление.** Разрешение в теории оптимального управления позволяет свести задачу синтеза систем оптимального управления к системе интегральных уравнений вида

$$\int_0^1 g(t) u(t) dt = y, \quad (2.8)$$

где

$$y = [y_1, \dots, y_n]^T, \quad g(t) = [g_{ki}(t)]_{k=1, i=1}^{n, m},$$

$$u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T,$$

а  $g_{kt}(t)$  — измеримые ограниченные на  $D$  функции, не равные тождественно нулю,  $u(t) \in L_p[D]$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Задача заключается в установлении условий существования

оптимального управления  $u(t)$  (решения системы (2.8), если на искомое управление  $u(t)$  наложены дополнительные ограничения) и в его отыскании.

В работе [55] доказано, что при ограничении

$$\|u(t)\|_2^2 \leq l^2$$

на «полную энергию» управляющих воздействий задача разрешима тогда и только тогда, когда матрица

$$M_1 = l^2 K - yy^*$$

неотрицательно определена. Здесь

$$K = \int_D g(t) g^*(t) dt, \quad \det K \neq 0.$$

Если при этом хотя бы один главный минор этой матрицы равен нулю, то система (2.8) имеет единственное решение

$$u(t) = g^*(t) K^{-1} y. \quad (2.9)$$

Если матрица  $M$  положительно определена, то система (2.8) имеет бесчисленное множество решений  $\|u(t)\|_2^2 \leq l^2$ , и среди них решение  $u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g^*(t) (K + \alpha I)^{-1} y$ , минимизирующее норму  $\|u(t)\|_2^2$ .

Если вместо  $\|u(t)\|_2^2 \leq l^2$  рассмотреть ограничение

$$\int_D u^*(t) a(t) u(t) dt \leq l^2, \quad (2.10)$$

где  $a(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^m$  — симметрическая матрица, положительно определенная на  $D$ , то система (2.8) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица

$$M_2 = l^2 Q - yy^*,$$

где

$$Q = \int_D g(t) a(t) g^*(t) dt,$$

неотрицательно определена. Если при этом хотя бы один главный минор этой матрицы обращается в нуль, то система (2.8) имеет единственное решение только вида

$$u(t) = a^{-1}(t) g^*(t) R^{-1} y, \quad (2.11)$$

где

$$R = \int_D g(t) a^{-1}(t) g^*(t) dt.$$

Если матрица  $M_2$  положительно определена, то система (2.8) имеет бесчисленное множество решений, удовлетворяющих условию (2.10), и среди них решение

$$u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} a^{-1}(t) g^*(t) (R + \alpha I)^{-1} y,$$

минимизирующее функционал

$$y(u) = \int_D u^*(t) a(t) u(t) dt.$$

Практический интерес представляет задача (2.8) при «энергетических» ограничениях, накладываемых отдельно на каждый руль [57]

$$\int_D |u_i(t)|^2 dt \leq l_i^2 < \infty, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

т. е. в случае, когда энергия каждого управляющего воздействия ограничена своей константой.

Для того чтобы система (2.8) с ограничениями (2.12) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы точка  $y$  принадлежала выпуклому множеству  $K$ , уравнения опорных гиперплоскостей которого имеют вид

$$\sum_{k=1}^n \beta_k y_k \pm \sum_{i=1}^m l_i \left[ \int_D \left[ \sum_{k=1}^n \beta_k g_{ki}(t) \right]^2 dt \right]^{1/2} = 0. \quad (2.13)$$

В работе [57] детально исследован вид решения в зависимости от того, где в  $K$  находится точка  $y$  — на его границе  $\partial K$  или принадлежит внутренности  $\text{int } K$ , и приведены алгоритмы отыскания этого решения. Там же приведены и менее обременительные условия совместности системы (2.8) при ограничениях (2.12). Для того чтобы система (2.8) при (2.12) имела решение, необходимо, чтобы матрица

$$\left[ l \sum_{i=1}^m l_i \int_D g_{ki}(t) g_{vi}(t) dt - y_n \bar{y}_v \right]_{n,v=1}^n$$

была неотрицательно определенной. Если при этом для любых  $\beta_k$ ,

$\sum_{k=1}^n |\beta_k|^2 > 0$ , выполняется равенство

$$\int_D \sum_{k=1}^n \beta_k [g_{kj}(t) - g_{kq}(t)] \sum_{r=1}^n \beta_m [g_{rt}(t) + g_{rg}(t)] dt = 0,$$

то необходимое условие становится и достаточным.

Нетрудно написать условие существования решения системы (2.8) и вид решения для ограничений

$$|u_i(t)| \leq \alpha_i(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Здесь  $\alpha_i(t) \geq 0$  — измеримые и ограниченные на  $D$  функции

$$u^*(t) \alpha(t) u(t) \leq \beta^2(t), \quad t \in D, \quad (2.15)$$

где  $\beta^2(t) > 0$  — ограниченная и измеримая на  $D$  функция,  $\alpha(t)$  — симметричная положительно определенная на  $D$  матрица с ограниченными и измеримыми на  $D$  элементами,

$$\int_D |u_i(t)| dt \leq l_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.16)$$

Наконец, задача оптимального финитного управления линейной динамической системой с сосредоточенными постоянными параметрами, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.17)$$

где  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$  и  $B = [b_{ij}]_{i=1,j=1}^{n,m}$  — матрицы, элементы которых не зависят от  $t$ ;  $x(t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $u(t)$  — соответственно, вектор-функции состояния, возмущения и управления системы, сводится после замены переменных и преобразования Фурье к системе интегральных относительно  $u(t)$  уравнений вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{-i\omega t})_{\omega}^{(r)} u_s(t) dt \big|_{\omega=-i\lambda_p} = \sqrt{2\pi} y_{prs}, \quad (2.18)$$

$$p = 1, \dots, k; \quad r = 0, 1, \dots, n_p - 1; \quad s = 1, \dots, m.$$

Здесь  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — корни характеристического многочлена

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

а  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ( $n_1 + \dots + n_k = n$ ) — числа, характеризующие кратности корней;  $y_{prs} = \tilde{u}_s^{(r)}(-i\lambda_p)$  — числа, однозначно определяющиеся значениями вектор-функций  $C(i\omega)$ ,  $B$  и  $\varphi(\omega)$  и их производных в точках  $\omega = -i\lambda_p$  из уравнения

$$\left\{ C(i\omega) \left[ B\tilde{u}(\omega) - \tilde{\varphi}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x_0 \right] \right\}_{i\omega=-i\lambda_p}^{(r_p)} = 0,$$

$$p = 1, \dots, k; \quad r_p = 0, 1, \dots, n_p - 1,$$

где  $C(\lambda)$  — матрица, присоединенная к  $A$ ;

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega t} \varphi(t) dt.$$

Опустив индекс  $s$ , перепишем (2.18) в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-it)^r e^{\lambda_p t} u(t) dt = \sqrt{2\pi} y_{rp}, \quad p = 1, \dots, k, \quad r = 0, 1, \dots, n_p - 1, \quad (2.19)$$

и для ее решения можно использовать весь аппарат, изложенный выше.

**Интерполяционные и экстремальные задачи теории аналитических функций.** Из большого количества разнообразных экстремальных и интерполяционных задач теории аналитических функций [61] для иллюстрации подхода к их решению остановимся на одной — на задаче интерполяции для регулярных функций.

Пусть  $A$  — класс функций  $\omega = f(z)$ , регулярных в области  $D$  комплексной  $z$ -плоскости и удовлетворяющих условию

$$\int_D |f(z)|^2 dz < +\infty. \quad (2.20)$$

Ставится задача отыскания такой функции  $f(z)$  из  $A$ , которая удовлетворяет условиям

$$f^{(m)}(z_j) = \omega_{mj}, \quad m = 0, 1, \dots, m_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad f^{(0)}(z) = f(z), \quad (2.21)$$

где  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  — фиксированные точки из  $D$ ,  $\omega_{mj}$  — заданные комплексные числа.

Поскольку  $f(z) \in A$  допускает интегральное представление структурной формулой

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_D K(\zeta, z) f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D. \quad (2.22)$$

Здесь

$$K(\zeta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(z)} \varphi_k(\zeta), \quad z, \zeta \in D,$$

а  $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$  — полная замкнутая ортонормированная в  $D$  система функций из класса  $A$ . Поставленная задача эквивалентна задаче отыскания решений  $f(\zeta)$  системы интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_D \overline{K_z^{(m)}(\zeta, z)}|_{z=z_j} f(\zeta) d\zeta = \omega_{mj}, \quad m = 0, 1, \dots, m_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.23)$$

$$\overline{K_z^{(m)}(\zeta, z)} = \frac{\partial^m K(\zeta, z)}{\partial z^m},$$

т. е. эквивалентна задаче интерпретации по неполным данным.

Следовательно, существует единственная функция  $f(\zeta) \in A$ , интерполирующая значения (2.21) и имеющая минимальную норму (2.20), это функция

$$f(\zeta) = g^*(\zeta) Q^{-1} y, \quad (2.24)$$

где  $y$  — вектор данных блочной структуры,

$$y = [y_1 | y_2 \dots | y_n]^T,$$

$$y_k = [\omega_{0k}, \omega_{1k}, \dots, \omega_{m_k k}]^T,$$

$g(\zeta)$  — базисная вектор-функция блочной структуры

$$g(\zeta) = [g_1(\zeta) | g_2(\zeta) | \dots | g_n(\zeta)]^T,$$

$$g_k(\zeta) = [\overline{K_z(\zeta, z_k)}, \overline{K_z^{(1)}(\zeta, z_k)}, \dots, \overline{K_z^{(m_k)}(\zeta, z_k)}]^T,$$

$Q$  — блочная невырожденная матрица, состоящая из блоков  $Q_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} K_{00}(z_i, z_j), & \dots, & K_{m_j 0}(z_i, z_j) \\ \vdots & & \vdots \\ K_{0m_i}(z_i, z_j), & \dots, & K_{m_j m_i}(z_i, z_j) \end{bmatrix},$$

где

$$K_{pq}(z_i, z_j) = \frac{\partial^{p+q}(\zeta, z)}{\partial z^p \partial \zeta^q} \bigg|_{\substack{z=z_j \\ \zeta=z_i}}.$$

Когда область  $D$  односвязна и известна функция  $\omega = \varphi(z, z_j)$ , однолистно и конформно отображающая область  $D$  на круг  $|\omega| < 1$  и нормированная условиями  $\varphi(z_j, z_j) = 0$ ,  $\varphi'(z_j, z_j) > 0$ , ядро  $K(z, z_j)$  можно записать в явном виде:

$$K(z, z_j) = \frac{1}{\pi} \varphi'(z, z_j) \varphi'(z_j, z_j).$$

В частности, если  $D$  является кругом  $|z| < 1$ , то

$$\varphi(z, z_j) = \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}z_j}, \quad \varphi'_z(z, z_j) = \frac{1 - |z_j|^2}{(1 - \bar{z}z_j)^2},$$

$$K(z, z_j) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(n - \bar{z}z_j)^2},$$

поэтому решение интерполяционной задачи для круга легко записать в явном виде.

Другие задачи для классов функций, имеющих структурные формулы, решаются аналогично.

**Аппроксимация нестандартных случайных величин стандартными случайными величинами, зависящими от случайных параметров (рандомизация плоскостей вероятностей).** С экстремальными задачами теории аналитических функций тесно связаны задачи рандомизации законов распределения случайных величин, играющих важную роль в разнообразных прикладных исследованиях. Рассмотрим один класс таких задач.

Пусть случайная величина  $\xi$  контролируется плотностью распределения вероятностей  $p(x)$  или моментами  $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Ставится задача аппроксимации величины  $\xi$  стандартной случайной величиной  $\eta$ , контролируемой плотностью распределения вероятностей  $f(x, \lambda)$  со случайным параметром  $\lambda$ . Требуется найти такой закон распределения  $F_\lambda(l)$  величины  $\lambda$ , чтобы рандомизированная плотность

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l) dF_\lambda(l)$$

оптимально аппроксимировала плотность  $p(x)$  (или имела те же моменты  $m_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ).

Следовательно, речь идет либо о решении экстремальной задачи

$$y(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ p(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l) dF_\lambda(l) \right]^2 dx \rightarrow \min \quad (2.25)$$

на классе неубывающих функций  $F_\lambda(l)$ , нормированных условием  $\int_{-\infty}^{\infty} dF_\lambda(l) = 1$ , либо об отыскании решения системы интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l) dF_\lambda(l) dx = m_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

на том же классе функций.

Из общих теорем, основанных на вариационном методе В. А. Зморвича и на устройстве выпуклых множеств точек  $m = [m_1, \dots, m_n]^T$  с координатами (2.26), следует, что случайный параметр  $\lambda$  в рассматриваемых задачах является дискретной случайной величиной. Экстремальная функция  $F_\lambda^0(l)$ , реализующая минимум в (2.25), является ступенчатой функцией с числом скачков, не превосходящим  $N$ , где  $N$  — наибольшее возможное число минимумов функции

$$Q_F(l) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l) \left[ p(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l) dF_\lambda(l) \right] dx$$

на интервале  $(-\infty, \infty)$ . Если функция  $Q_F(l)$  дифференцируема, то в каждой точке разрыва функции  $F_\lambda^0(l)$  должно выполняться условие

$$Q'_{F^0}(l) = 0.$$

Плотность вероятностей параметра  $\lambda$  имеет вид

$$p_\lambda(l) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(l - l_i),$$

где  $l_i$  — точки минимума функции  $Q_{F_\lambda^0}(l)$ , удовлетворяющие уравнению  $Q'_{F_\lambda^0}(l) = 0$ , число  $N$  совпадает с числом абсолютных минимумов функции  $Q_{F_\lambda^0}(l)$ .

Для отыскания вероятностей  $p_i$ , с которыми  $\lambda$  принимает значения  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , следует решить задачу квадратичного программирования

$$S(p) = p^* A p - B^* p + C \rightarrow \min, \quad (2.27)$$

где  $p = (p_1, \dots, p_N)^T$ ,  $A$ -матрица состоит из элементов

$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l_i) \overline{f(x, l_j)} dx, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$B = (b_1, \dots, b_N)^T, \quad b_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l_k) p(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x) dx$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Например, для аппроксимации равномерно распределенной на двух отрезках  $0 < \alpha < |x| < 1 + \alpha$  случайной величины  $\xi$  нормальной величиной с единичной дисперсией и случайным математическим ожиданием  $\mu$  оказывается достаточным принять  $N = 2$ ,  $m_1 = m_2$ , где  $m_1$  — корень уравнения

$$\exp \left\{ -\frac{1+2\alpha}{2} \right\} \operatorname{ch} [1 + \alpha] m - \operatorname{ch} [\alpha m] = 0, \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2}.$$

Для решения системы (2.26) преобразуем ее к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(l) dF_\lambda(l) = m_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.28)$$

где

$$u_k(l) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x, l) dx,$$

и используем методы классической проблемы моментов.

Построим выпуклую оболочку кривой

$$x_k = u_k(l), \quad -\infty < l < \infty, \quad k = 1, \dots, n,$$

множества  $C$ . Если точка  $m = (m_1, \dots, m_n)^T \in \partial C$ , то существует единственная функция  $F_\lambda^0(l)$ , которой соответствует точка  $m$ . Это ступенчатая функция с числом точек роста  $d \leq \frac{n+1}{2} - l_1, \dots, l_d$

и скачками  $\mu_1 \geq 0, \dots, \mu_d \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^d \mu_i = 1$ . Если же  $m \in \operatorname{int} C$  — внутренней точки множества  $C$ , то существует бесчисленное множество  $F_\lambda(l)$ , которому соответствует точка  $m$ .

Таким образом, вопрос о решении системы (2.26) свелся к вопросу о принадлежности  $m$  множеству  $C$ . И если  $m \notin C$ , то система (2.26) не имеет решений.

В качестве примера приведем задачу о рандомизированной равномерно распределенной величине со случайной медианой  $\lambda$ , имеющей заданные моменты  $m_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Рандомизированная плотность такой величины имеет вид

$$P_\eta(y) = \sum_{k=1}^d \mu_k f_0(y, l_k),$$

$$f_0(y, l_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y - l_k| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } |y - l_k| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$



где  $\mu_k$  и  $l_k$  удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^a \mu_k \mu_l(l_k) = m_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad m_0 = 1, \quad u_0(l) \equiv 1,$$

$$u_l(l) = \frac{1}{l+1} \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^{j+1} - \left( l - \frac{1}{2} \right)^{j+1} \right], \quad j = 1, \dots, n.$$

**Спектральное оценивание.** При решении разнообразных задач физики и техники возникает проблема определения спектральной плотности мощности  $P(\nu)$  по значениям корреляционной функции  $\Phi(\tau)$ , измеренной в конечном числе точек  $\tau_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\Phi_k = \Phi(\tau_k)$ , [60].

Таким образом, речь идет об отыскании решения системы интегральных уравнений

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} p(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.29)$$

на классе неотрицательных на  $[-\pi, \pi]$  функций  $p(x) \geq 0$  из класса  $L_2[-\pi, \pi]$ . Если ввести функцию

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(\xi) d\xi$$

и нормировать равенства (2.29) умножением на  $1/\Phi_0$ , то (2.29) сведутся к системе (2.28) с

$$m_k = \frac{\Phi_k}{\Phi_0}, \quad k = 1, \dots, n, \quad u_k(x) = \frac{1}{2\pi\Phi_0} e^{-iux}.$$

При решении более сложных задач спектрального анализа полезным оказывается следующий результат, обобщающий теорему А. А. Маркова [566]. Рассматривается задача восстановления функций-сигналов, представимых стильтьесовым интегралом

$$f(z) = \int_a^b g(z, x) d\mu(x), \quad z \in D, \quad (2.30)$$

где  $\mu(x)$  — вещественная неубывающая на  $[a, b]$  функция, удовлетворяющая условиям

$$\mu(a) = 0, \quad \mu(x) = \mu(x+0), \quad a < x \leq b,$$

$$\int_a^b u_k(x) d\mu(x) = C_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.31)$$

$\{C_k\}_0^n$  — заданная последовательность вещественных чисел;  $\{u_k(x)\}_0^n$  — заданная последовательность вещественных функций, определенных и непрерывных на  $[a, b]$ ;  $g(z, x)$  — вещественная непрерывная на  $D \times [a, b]$  функция. По отсчетам  $y_k = f(x_k)$ ,  $x_k \in D$ ,  $k = 1, \dots, m$ , требуется восстановить  $f(x)$ .

Множество  $C$  точек  $y = (y_1, \dots, y_m)$   $m$ -мерного пространства

$$y_l = \int_a^b g(z_l, x) d\mu(x)$$

является выпуклым криволинейным многогранником лишь с двумя вершинами, если  $\{u_k(x)\}_0^n$  — нормированная система П. Л. Чебышева порядка  $n$  на  $[a, b]$  и последовательность  $\{C_k\}_0^n$  строго позитивна относительно  $\{u_k(x)\}_n^0$  и если функции  $\{u_k(x); g(z_j, x)\}$  образуют нормированную систему П. Л. Чебышева порядка  $n + m$  на  $[a, b]$ . Чтобы точка  $y$ , соответствующая функции  $\mu(x)$ , была граничной для  $C$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\mu(x)$  была ступенчатой и ее индекс  $s$  удовлетворял неравенствам

$$n + 1 \leq s \leq n + m$$

(для вершин  $s = n + 1$ , для ребер  $s = n + 2$ , для граней  $s = n + 3$ , для гиперграней  $s = n + k$ ,  $3 < k \leq m$ ). Если же последовательность  $\{C_k\}_0^n$  сингулярна относительно  $\{u_k(x)\}_0^n$ , то  $C$  сводится к точке и нижняя граница  $s$  может быть сведена до единицы. При этом восстановленная  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{j=1}^s \lambda_j g(z, x_j), \quad (2.32)$$

где  $s, \lambda_j \geq 0$  и  $a \leq x \leq b$ ,  $j = 1, \dots, s$ , удовлетворяет системе равенств

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s \lambda_j u_k(x_j) &= c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^s \lambda_j g(z_r, x_j) &= y_r, \quad r = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Для их отыскания можно использовать результаты, изложенные в п. 7, § 1 данной главы, модифицировав их так, чтобы выполнялись неравенства  $\lambda_j \geq 0$ .

В заключение опишем еще несколько задач, для решения которых может быть применена техника интерпретации наблюдений по неполным данным. Будем называть задачу и выписывать линейный интегральный оператор, не детализируя постановку задачи.

*Обратная задача гравиметрии* — это задача определения формы возмущающего тела, плотность которого отлична от плотности окружающей среды, по аномалии напряжения силы тяжести, создаваемой на поверхности земли. Справедливо нелинейное уравнение

$$\int_a^b \ln \frac{(x - \xi)^2 + H^2}{(x - \xi)^2 + |H - z(\xi)|^2} d\xi = u(x) = \frac{2\pi}{\rho_2 \rho_1} \Delta g(x), \quad (2.34)$$

где  $\Delta g(x) = -\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0}$  — измеренная на поверхности земли аномалия напряжения, обусловленная силой тяжести;  $(x, \xi)$  — координаты вдоль поверхности земли ( $z = 0$ ); среда, находящаяся

под поверхностью земли, считается состоящей из двух частей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , разделенных границей  $\tilde{z}(x) = -H$  всюду, кроме промежутка  $a \leq x \leq b$ , где  $\tilde{z}(x) = -H + z(x)$ , что и создает напряжения, т. е. зависимость  $u$  от  $x$ ;  $V$  — потенциал масс с плотностью  $\rho_2 = \rho_1$ ;  $z(\xi)$  — искомая форма границы, разделяющая две части среды.

В линейном приближении ( $z(\xi) \ll H$ )

$$\int_a^b \frac{H}{(x - \xi)^2 + H^2} z(\xi) d\xi = u(x).$$

Если аномалия  $u(x)$  измеряется в точках  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то  $z(\xi)$  восстанавливается по системе интегральных уравнений

$$\int_a^b \frac{H}{(x_i - \xi)^2 + H^2} z(\xi) d\xi = u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad u_i = u(x_i).$$

*Определение фотонного спектра кристаллов по теплоемкости.* Задача сводится к решению уравнения

$$3N_k \int_0^{\nu_m} \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^2} f(\nu) d\nu = C_v(T),$$

где  $f(\nu)$  — искомая функция распределения частот (фотонный спектр) тепловых колебаний атомов кристаллической решетки около положения равновесия (в квазиупругом приближении);  $C_v(T) = \frac{\partial E}{\partial T}$  — удельная теплоемкость;  $E$  — энергия кристалла;  $T$  — температура;  $\nu_m$  — максимальная частота колебаний в кристалле;  $k$  — постоянная Больцмана;  $h$  — постоянная Планка; кристалл рассматривается как совокупность независимых атомных осцилляторов, имеющих разрешенные энергетические уровни  $h\nu(i + \frac{1}{2})$ ,  $i = 1, 2, \dots, 3N$ .

*Ядерная магнитно-резонансная спектроскопия (NMR)*

$$M(t) = \int_0^\alpha n(\omega) \sin(\omega t) \exp(-k(\omega)t) d\omega.$$

*Автокалибровка*

$$M(t) = \int_0^\infty n(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \exp(-kt) d\omega.$$

*EXAFS data*

$$X(k) = \int a(k) \sin(2kr + \varphi(k)) \exp\left(-\frac{r}{\lambda(k)}\right) N(r)/kr^2 dr.$$

*Определение скорости звука в воде.* Пусть на глубине  $h_1$  от поверхности воды находится источник звука  $s$  и пусть на глубине  $h_0$  (в различных местах) засекается время прохождения звука  $t(\varphi)$  от  $s$  до приемника в функции угла прихода звукового луча  $\varphi$  (между гори-

зонталью и касательной к лучу). Тогда

$$\int_{n_0}^{n_1} \frac{dh}{c(h) \sqrt{1 - c^2(h) \frac{\cos^2 \varphi}{c^2(h_0)}}} = t(\varphi)$$

есть уравнение для определения скорости звука  $C(h)$ .

*Определение функции распределения истинных конфигураций тройных звезд.* В результате случайности проектирования на плоскость видимые конфигурации тройных звезд (а именно формы треугольников, образованных тремя компонентами) отличаются от истинных конфигураций. Существует двухмерное уравнение Фредгольма первого рода, связывающее функцию распределения конфигураций тройных звезд с наблюдаемой конфигурацией

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} K(\xi - x, \eta, y) f(x, y) dx dy = 2\pi \eta^2 \varphi(\xi, \eta),$$

где

$$K(\xi - x, \eta, y) = \left[ 1 - \left[ \frac{2\eta y}{(\xi - x)^2 + \eta^2 + y^2} \right]^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - 1,$$

$-\infty < x < \infty$ ,  $y \geq 0$  — координаты наиболее слабой компоненты  $C$  в плоскости тройной звезды, в которой начало координат системы  $ХОУ$  совмещено с наиболее яркой компонентой  $A$ , а ось  $x$  направлена во вторую по яркости компоненту  $B$ , причем расстояние между  $A$  и  $B$  принято равным единице;  $-\infty < \xi < \infty$ ,  $\eta \geq 0$  — аналогичные координаты в проекции на плоскость, расстояние между  $A$  и  $B$  в этой плоскости также принято равным единице.

В заключение следует отметить, что на практике данные оказываются пораженными шумами, а матрица  $K$ , которая требует обращения почти во всех алгоритмах, оказывается вырожденной, особенно когда данные получаются от различных источников информации. Поэтому возникает необходимость обобщения всех изложенных здесь методов на случай данных, пораженных шумами, и вырожденных матриц  $K$  [19, 21].

### § 3. Сеточный метод решения линейного и нелинейного интегральных уравнений Фредгольма второго рода

Рассматривается интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta + f(x), \quad (3.1)$$

где  $\lambda$  не является собственным значением.

Строится специальная сеточная аппроксимация уравнения (3.1) вида

$$v_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} v_j + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

Здесь

$$A_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dx dt, \quad x_i = ih, \quad h = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Находятся условия, при которых уравнение (3.1) имеет единственное решение в классах Соболева  $W_2^\alpha(0, 1)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2$ . Доказывается, что скорость сходимости приближенного решения к усредненному (по Стеклову) точному решению исходного интегрального уравнения (3.1) равна  $O(h^\alpha |\ln h|^{\frac{1}{2} \cdot \alpha + \delta_{ij} \cdot \frac{3}{2}})$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Известно следующее утверждение [50].

**Лемма 3.1.** Если правая часть уравнения (3.1) и  $|\lambda| < \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^{-1/2}$ ,  $f(x) \in L_2(\Omega)$ , ядро  $K(x, \zeta) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ , то интегральное уравнение (3.1) однозначно разрешимо на  $\Omega$  и его решение  $u(x) \in L_2(\Omega)$ , где  $\Omega = (0, 1)$ .

С помощью леммы 3.1 доказывается следующая теорема.

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия леммы 3.1,  $f(x) \in W_2^\alpha(\Omega)$ , ядро  $K(x, \zeta)$  удовлетворяет неравенству

$$\|K(x, \zeta)\|_{\alpha, \Omega \times \Omega} < \infty, \quad (3.3)$$

где

$$\|K(x, \zeta)\|_{\alpha, \Omega \times \Omega} = \left\{ \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2 + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\cdot\|_{0, \Omega \times \Omega} = \|\cdot\|_{L_2, \Omega \times \Omega},$$

тогда решение уравнения (3.1) принадлежит классу  $W_2^\alpha(\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим интегральный оператор

$$Tu(x) = \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta, \quad (3.4)$$

имеем

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{\alpha, \Omega} &= \left\{ \|Tu(x)\|_{0, \Omega}^2 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(Tu(x) - Tu(t))^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta - \int_0^1 K(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta \Big\}^{\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \|Tu(x)\|_{\alpha, \Omega} &\leq \left\{ \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta + \right. \\ &\left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{0, \Omega} \|K(x, \zeta)\|_{\alpha, x, \Omega}, \end{aligned}$$

поэтому при условии (3.3) решение уравнения  $u(x) \in W_2^\alpha(\Omega)$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $|\lambda| < \Lambda^{-1/2}$ ,  $f(x) \in W_2^1(\Omega)$ , ядро  $K(x, \zeta) \in W_2^1(\Omega)$ , тогда  $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ .

**Доказательство.** Для оператора (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{1, \Omega} &= \left\{ \|Tu\|_{0, \Omega}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} Tu \right\|_{0, \Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \int_0^1 \left( \int_0^1 K'_x(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|Tu\|_{1, \Omega} \leq \|u\|_{0, \Omega} \|K(x, \zeta)\|_{1, \Omega},$$

и поэтому

$$u(x) \in W_2^1(\Omega).$$

**Теорема 3.3.** Пусть  $|\lambda| < \Lambda^{-1/2}$ ,  $f(x) \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ , ядро  $K(x, \zeta)$  удовлетворяет неравенству

$$\|K(x, \zeta)\|_{\alpha, x, \Omega}^2 + \|K'_x(x, \zeta)\|_{\alpha, x, \Omega}^2 < \infty, \quad (3.5)$$

тогда решение уравнения (3.1)  $u(x) \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Доказательство. Для оператора (3.4) имеем

$$\|Tu\|_{1+\alpha,\Omega} = \left\{ \|Tu\|_{1,\Omega} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(Tu(x) - Tu(t))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \frac{((Tu(x))' - (Tu(t))')^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\|Tu\|_{1+\alpha,\Omega} = \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \int_0^1 \left( \int_0^1 K'_x(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta - \int_0^1 K'_t(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^1 K'_x(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta - \int_0^1 K'_t(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K'_x(x, \zeta) - K'_t(t, \zeta))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$\|Tu(x)\|_{1+\alpha,\Omega} \leq \left\{ \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K'_x(x, \zeta) - K'_t(t, \zeta))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

поэтому при условии (3.5) решение уравнения (3.1)  $u(x) \in W_2^{1+\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Теорема доказана.

Перейдем к исследованию точности сеточной схемы (3.2). Разобьем единичный отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  равных частей. Проинтегрируем уравнение (3.1) на отрезке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx = \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \int_0^1 K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (3.6)$$

Интеграл по  $\zeta$  разобьем на  $n$  частей, к ядру  $K(x, \zeta)$  добавим и отнимем величину  $\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) ds$ , тогда формула (3.6) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx = & \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( K(x, \zeta) + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) ds - \right. \\ & \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) ds \right) dx u(\zeta) d\zeta + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx = & \lambda \sum_{j=1}^n h \left( \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) dx ds \right) \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(\zeta) d\zeta \right) + \\ & + \lambda \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) ds \right) dx u(\zeta) d\zeta + \\ & + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx = & \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(\zeta) d\zeta \right) + \lambda R_i + \\ & + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$R_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( K(x, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) ds \right) u(\zeta) dx d\zeta.$$

Очевидно, что, отбрасывая слагаемое  $\lambda R_i$  в (3.7), получим линейную алгебраическую систему уравнений (3.2) относительно  $u_i$ .



Вычитая (3.2) из (3.7) и введя обозначение

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx - v_i, \quad i = \overline{1, n},$$

будем иметь

$$(E - A) \varepsilon = \lambda R, \quad (3.8)$$

где

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T, \quad R = (R_1, \dots, R_n)^T, \quad A = \|\lambda h A_{ij}\|_1^2.$$

Если матрица  $E - A$  невырождена, то система однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq \|\lambda\| \|(E - A)^{-1}\| \|R\|_{0, \omega_h}, \quad (3.9)$$

где  $\|\cdot\|$  — разностный аналог нормы  $\|\cdot\|_{0, \Omega}$ , а  $\|\cdot\|$  — норма матрицы, например, спектральная (2.5), согласованная с нормой вектора.

Невырожденность матрицы  $E - A$  устанавливает следующая лемма.

**Лемма 3.2.** Если

$$|\lambda| \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega} < 1, \quad (3.10)$$

то матрица  $E - A$  невырождена, обратима и справедлива оценка

$$\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}, \quad (3.11)$$

где  $q = \|A\| < 1$

**Доказательство.** Из эквивалентности сферической и спектральной норм следует

$$\|A\| \leq N(A),$$

поэтому с помощью неравенства Коши — Буняковского и неравенства (3.10) получаем

$$\begin{aligned} q = \|A\| \leq N(A) &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \lambda \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, \zeta) dx d\zeta \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\lambda| \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega} < 1, \end{aligned}$$

т. е. справедливо неравенство (3.11).

Норма погрешности  $\|\varepsilon\|_{0, \omega_h}$  оценивается с помощью следующих двух теорем.

**Теорема 3.4.** Пусть выполнены условия теоремы 3.1, ядро  $K(x, \zeta)$  удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} &= \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^{1+2(1-\alpha)}} d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \\ 0 &\leq \alpha < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

тогда если выполнено условие теоремы 3.1 и леммы 3.2, то будут справедливы оценки:

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^\alpha \| u \|_{\alpha, \Omega} \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \quad (3.12)$$

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^\alpha |\ln h|^{\frac{1}{2} + \alpha} \| u \|_{\alpha, \Omega} \| K(x, \zeta) \|_{\alpha, \zeta, \Omega}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad (3.13)$$

где

$$\| K(x, \zeta) \|_{\alpha, \zeta, \Omega} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

**Доказательство.** В неравенстве (3.9) оценим норму  $\| R \|_{0, \omega_h}$ . Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \| R \|_{0, \omega_h}^2 &= \sum_{i=1}^n h R_i^2 = \sum_{i=1}^n h \left\{ \sum_{l=1}^n \int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{1}{h} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left( K(x, \zeta) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{l-1}}^{x_l} K(x, s) ds \right) u(\zeta) dx d\zeta \right\}^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^4} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, s)) u(\zeta) dx d\zeta ds \right\}^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \| R \|_{0, \omega_h}^2 &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t))^2 dx d\zeta dt \times \\ &\quad \times \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^2(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Допустим  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , тогда из неравенства (3.14) будем иметь

$$\begin{aligned} \| R \|_{0, \omega_h}^2 &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, s))^2}{|\zeta - s|^{1+2(1-\alpha)}} |\zeta - s|^{3-2\alpha} \times \\ &\quad \times dx d\zeta ds \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^2(\zeta) d\zeta \leq \frac{1}{h^2} h^{3-2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^2(\zeta) d\zeta \times \\ &\quad \times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, s))^2}{|\zeta - s|^{1+2(1-\alpha)}} dx d\zeta ds, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \|R\|_{0,\omega_h}^2 &\leq h^{1-2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|u(\xi)\|_{0,x_{j-1} \leq x \leq x_j}^2 \times \\ &\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \xi) - K(x, s))^2}{|\xi - s|^{1+2(1-\alpha)}} dx d\xi ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Справедливо неравенство [53]

$$\|u\|_{0,x_{j-1} \leq x \leq x_j} \leq C(h) \|u\|_{\alpha,\Omega}, \quad (3.16)$$

где

$$C(h) = C_1 \begin{cases} h^\alpha, & 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \\ h^{\frac{1}{2}} |\ln h|, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ h^{\frac{1}{2}}, & \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (3.17)$$

постоянная  $C_1$  не зависит от  $u$ .

Если используем неравенство (3.16) — (3.17), то для (3.15) будем иметь

$$\|R\|_{0,\omega_h}^2 \leq C_1^2 h^{1-2\alpha} h^{2\alpha} \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \xi) - K(x, s))^2}{|\xi - s|^{1+2(1-\alpha)}} dx d\xi ds,$$

или

$$\|R\|_{0,\omega_h}^2 \leq C_1^2 h \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} \|_{0,x_{i-1} \leq x \leq x_i}^2. \quad (3.18)$$

Используя неравенства (3.16) — (3.17), для (3.18) получаем

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_1^2 h^\alpha \|u\|_{\alpha,\Omega} \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} \|_{\alpha,x,\Omega}. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.11) и (3.19), из неравенства (3.9) получаем оценку

$$\|\varepsilon\|_{0,\omega_h} \leq Ch^\alpha \|u\|_{\alpha,\Omega} \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} \|_{\alpha,x,\Omega}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2},$$

где

$$C = |\lambda| \frac{1}{1-q} C_1^2,$$

т. е. справедлива оценка (3.12).

Если  $\alpha = \frac{1}{2}$ , то, используя (3.16) — (3.17), для (3.14) будем иметь

$$\|R\|_{0,\omega_h}^2 \leq C_1^2 \frac{1}{h^3} h^2 h |\ln h|^2 \|u\|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \xi) - K(x, s))^2}{|\xi - s|^2} dx d\xi ds,$$

или

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_1 h^{\frac{1}{2}} |\ln h| \|u\|_{\frac{1}{2},\Omega} |K(x, \xi)|_{\frac{1}{2},\Omega}. \quad (3.20)$$

Учитывая оценки (3.11) и (3.20), из неравенства (3.9) получаем

$$\|\varepsilon\|_{0,\omega_h} \leq C h^{\frac{1}{2}} |\ln h| \|u\|_{\frac{1}{2},\Omega} |K(x, \xi)|_{\frac{1}{2},\Omega}, \quad (3.21)$$

где

$$C = |\lambda| \frac{1}{1-q} C_1.$$

Если  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ , то по формулам (3.16) — (3.17) имеем

$$\|R\|_{0,\omega_h}^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha-1} \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \xi) - K(x, s))^2}{|\xi - s|^{1+2\alpha}} dx d\xi ds,$$

или

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_1 h^\alpha \|u\|_{\alpha,\Omega} |K(x, \xi)|_{\alpha,\Omega}. \quad (3.22)$$

Учитывая (3.11) и (3.22), из неравенства (3.9) получаем оценку

$$\|\varepsilon\|_{0,\omega_h} \leq C h^\alpha \|u\|_{\alpha,\Omega} |K(x, \xi)|_{\alpha,\Omega}, \quad (3.23)$$

где

$$C = C_1 \frac{1}{1-q} |\lambda|, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1.$$

Объединение неравенств (3.21) и (3.23) дает неравенство (3.13), теорема доказана.

**Теорема 3.5.** Пусть выполнены условия теоремы 3.3, ядро  $K(x, \xi)$  удовлетворяет неравенствам (3.5) и

$$[K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} < \infty, \quad [K'_\xi(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} < \infty, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2},$$

тогда при выполнении условий леммы 3.2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{0,\omega_h} &\leq C h^{\alpha+1} \{ \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 [K'_\xi(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} \|u\|_{\alpha,x,\Omega}^2 + \\ &+ \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 [K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} \|u\|_{\alpha,x,\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{0,\omega_h} &\leq C h^{\alpha+1} |\ln h|^{\frac{1}{2-\alpha}} \{ \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 |K'_\xi(x, \xi)|_{\alpha,\xi,\Omega} + \\ &+ \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 |K(x, \xi)|_{\alpha,\xi,\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

**Доказательство.** Преобразуем остаточный член  $R_l$ :

$$R_l = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x, \xi) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) ds \right) u(\xi) dx d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x, \zeta) - \frac{1}{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, s) ds \right) \times \\ \times \left( u(\zeta) + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(s) ds - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right) dx d\zeta = R_i^{(1)} + R_i^{(2)},$$

где

$$R_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t)) \times \\ \times \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right) dx d\zeta dt,$$

$$R_i^{(2)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t)) \times \\ \times \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u(\zeta) - u(s)) dx d\zeta ds dt.$$

Оценим норму

$$\|R\|_{0, \omega_h}^2 = h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)} + R_i^{(2)}),$$

т. е.

$$\|R\|_{0, \omega_h}^2 \leq 2h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 + 2h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2. \quad (3.26)$$

В неравенстве (3.26) оценим первое слагаемое

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 = h \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t)) \times \right. \\ \times \left. \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds dx d\zeta dt \right\}^2 \leq \\ \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{h^3} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t)) dx d\zeta dt \right\}^2 \leq \\ \leq \frac{1}{h^6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(s) ds \right)^2 \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t)) dx d\zeta dt \right)^2 \leq \\ \leq \frac{1}{h^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^2(s) ds \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{\zeta} \frac{\partial K(x, \eta)}{\partial \eta} dx d\zeta dt d\eta \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^2(s) ds \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{\eta}^{\xi} \left( \frac{\partial K(x, \eta)}{\partial \eta} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\partial K(x, \theta)}{\partial \theta} d\theta \right) dx d\xi dt d\eta \right\}^2 = \frac{1}{h^7} h^5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^2(s) ds \times \\
&\quad \times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \frac{\partial K(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dx d\xi dt d\eta d\theta,
\end{aligned}$$

Т. е.

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^2(s) ds \times \\
&\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \frac{\partial K(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dx d\eta d\theta. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Пусть  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , тогда если используем неравенства (3.16) — (3.17), то для (3.27) будем иметь

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^2(s) ds \times \\
&\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\left( \frac{\partial K(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2}{|\eta - \theta|^{1+2(1-\alpha)}} |\eta - \theta|^{1+2(1-\alpha)} dx d\eta d\theta \leq \\
&\leq h^{3-2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|u\|_{0, x_{j-1} \leq x \leq x_j}^2 \times \\
&\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\left( \frac{\partial K(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2}{|\eta - \theta|^{1+2(1-\alpha)}} dx d\eta d\theta \leq \\
&\leq C_1^2 h^{3-2\alpha} h^{2\alpha} \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [K'_\zeta(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega}^2 dx = \\
&= C_1^2 h^3 \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n \| [K'_\zeta(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \|_{0, x_{i-1} < x < x_i}^2 \leq \\
&\leq C_1^4 h^3 h^{2\alpha} \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 \| [K'_\zeta(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n 1,
\end{aligned}$$

Т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 \leq C_1^4 h^{2\alpha+2} \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 \| [K'_\zeta(x, \zeta)]_{1-\alpha,\zeta,\Omega} \|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2. \quad (3.28)$$

Пусть  $\alpha = 1/2$ , тогда если используем неравенства (3.16) — (3.17), получим

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 \leq h^3 C_1^2 |\ln h|^2 \|u\|_{\frac{1}{2},\Omega} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \frac{\partial K(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2}{|\eta - \theta|^2} dx d\eta d\theta,$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 \leq C_1^2 h^3 |\ln h|^2 \|u\|_{\frac{1}{2},\Omega} |K'_\zeta(x, \zeta)|_{\frac{1}{2},\Omega}^2. \quad (3.29)$$

Пусть  $1/2 < \alpha \leq 1$ , тогда

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 \leq C_1 h^{2\alpha+2} \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 |K'_\zeta(x, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2. \quad (3.30)$$

Неравенства (3.29) и (3.30) можно объединить, в результате

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 \leq C_1 h^{2\alpha+2} |\ln h|^{\frac{2\delta}{2-\alpha}} \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 |K'_\zeta(x, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2, \quad (3.31)$$

где  $1/2 \leq \alpha < 1$ .

Теперь оценим второе слагаемое

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 &= h \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u(\zeta) - u(s)) dx ds d\zeta dt \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{h^6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t)) (u(\zeta) - u(s)) \times \right. \\ &\quad \left. \times dx d\zeta ds dt \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{h^6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_s^\zeta (K(x, \zeta) - K(x, t)) u'(\theta) dx d\zeta dt ds d\theta \right\}^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(\theta))^2 d\theta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \zeta) - K(x, t))^2 \times \\ \times dx d\zeta dt. \quad (3.32)$$

Пусть  $0 \leq \alpha < 1/2$ , тогда, если используем неравенства (3.16) — (3.17), для (3.32) будем иметь

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_j} (u'(\theta))^2 d\theta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \xi) - K(x, t))^2}{|\xi - t|^{1+2(1-\alpha)}} \times \\ &\times |\xi - t|^{1+2(1-\alpha)} dx d\xi dt \leq h^{3-2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_j} (u'(\theta))^2 d\theta \times \\ &\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \xi) - K(x, t))^2}{|\xi - t|^{1+2(1-\alpha)}} dx d\xi dt \leq \\ &\leq h^{3-2\alpha} h^{2\alpha} C_1^2 \|u'(x)\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [K(x, \xi)]_{1-\alpha, \xi, \Omega}^2 dx \leq \\ &\leq C_1^4 h^3 h^{2\alpha} \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha, \xi, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n 1, \end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 \leq C_1^4 h^{2\alpha+2} \|u'(x)\|_{\alpha, \Omega}^2 \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha, \xi, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2. \quad (3.33)$$

Если  $\alpha = 1/2$ , то из формулы (3.32), используя неравенства (3.16) — (3.17), будем иметь

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 \leq C_1^2 h^3 |\ln h|^2 \|u'\|_{1/2, \Omega}^2 \|K(x, \xi)\|_{1/2, \xi, \Omega}^2. \quad (3.34)$$

Если  $1/2 < \alpha \leq 1$ , то из формулы (3.32) получим

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \|K(x, \xi)\|_{\alpha, \xi, \Omega}^2; \quad (3.35)$$

неравенства (3.34) и (3.35) можно объединить, тогда

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} |\ln h|^{\frac{2\delta}{2}, \alpha} \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \|K(x, \xi)\|_{\alpha, \xi, \Omega}^2, \quad (3.36)$$

где  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ .

Подставим оценки (3.28) и (3.33) в неравенство (3.26), в результате чего получим

$$\begin{aligned} \|R\|_{0, \omega_h} &\leq \sqrt{2} C_1^2 h^{\alpha+1} \{ \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 \| [K_\xi(x, \xi)]_{1-\alpha, \xi, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2 + \\ &+ \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha, \xi, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.37)$$



где  $0 \leq \alpha < 1/2$ .

Учитывая оценки (3.11) и (3.37), из неравенства (3.9) получим (3.24).

Подставим оценки (3.31) и (3.36) в неравенство (3.36), в результате будем иметь

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq \sqrt{2} C_1 h^{\alpha+1} |\ln h|^{\frac{\delta_1}{2}\alpha} \{ \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 |K'_\zeta(x, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 + \\ + \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.38)$$

где  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ .

Учитывая оценки (3.11) и (3.38), из неравенства (3.9) получим (3.25). Теорема доказана.

Построим разностную схему и оценим погрешность аппроксимации уравнения (3.1) в нормах  $\|\cdot\|_{0,\omega_h}$ ,  $\|\cdot\|_{C,\omega_h}$ , при этом не будет производиться усреднение интегрального уравнения.

В уравнении (3.1) допустим  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а интеграл по  $\zeta$  разобьем на  $n$  частей:

$$u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) u(\zeta) d\zeta + f(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.39)$$

К ядру  $K(x, \zeta)$  добавим и отнимем величину  $\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds$ , тогда (3.39) преобразуется следующим образом:

$$u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds - \\ - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds) u(\zeta) d\zeta + f(x_{i-\frac{1}{2}}),$$

или

$$u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(\zeta) d\zeta \right) + \\ + \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) u(\zeta) d\zeta + f(x_{i-\frac{1}{2}}). \quad (3.40)$$

Преобразовав выражение (3.40), получим

$$u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u(\zeta) + u(\zeta_{j-\frac{1}{2}}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j) - u(\zeta_{j-\frac{1}{2}}) - (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j)) d\zeta \Big) + \\
& + \lambda \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) u(\zeta) d\zeta + f(x_{i-\frac{1}{2}}), \\
& i = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
u(x_{i-\frac{1}{2}}) &= \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(\zeta_{j-\frac{1}{2}}) d\zeta + \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j) d\zeta \right) + \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \times \\
&\times \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u(\zeta) - u(\zeta_{j-\frac{1}{2}}) - (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j)) d\zeta \right) \times \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) u(\zeta) d\zeta. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Вычислим в отдельности каждый член этого выражения. Второй член выражения (3.41) равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j) d\zeta = u_{\zeta}(\zeta_j) \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) d\zeta = \\
&= u_{\zeta}(\zeta_j) \frac{(\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}})^2}{2} \Big|_{\zeta=\zeta_{j-1}}^{\zeta=\zeta_j} = \frac{(\zeta_j - \zeta_{j-\frac{1}{2}})^2}{2} - \frac{(\zeta_{j-\frac{1}{2}} - \zeta_{j-1})^2}{2} = \\
&= \frac{\left( jh - \left( j - \frac{1}{2} \right) h \right)^2}{2} - \frac{\left( \left( j - \frac{1}{2} \right) h - (j-1)h \right)^2}{2} = \\
&= \frac{\left( jh - jh + \frac{1}{2}h \right)^2}{2} - \frac{\left( jh - \frac{1}{2}h - jh + h \right)^2}{2} = \frac{\frac{1}{4}h^2}{2} - \frac{\frac{1}{4}h^2}{2} = 0,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j) d\zeta \right) = 0. \quad (3.42)$$

Преобразуем третий член выражения (3.41). С этой целью используем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
 & u(\zeta) - u(\zeta_{j-\frac{1}{2}}) - (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j) = \\
 &= \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} u'(\eta) d\eta - \frac{1}{h} (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) (u(\zeta_j) - u(\zeta_{j-1})) = \\
 &= \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} u'(\eta) d\eta - \frac{\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}}{h} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta} u'(\theta) d\theta = \\
 &= \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} u'(\eta) d\eta - \frac{1}{h} \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta} u'(\theta) d\theta d\eta = \\
 &= \frac{1}{h} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} u'(\eta) d\eta d\theta - \frac{1}{h} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} u'(\theta) d\theta d\eta = \\
 &= \frac{1}{h} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta,
 \end{aligned}$$

т. е.

$$u(\zeta) - u(\zeta_{j-\frac{1}{2}}) - (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j) = \frac{1}{h} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta.$$

С учетом этого факта третий член (3.41) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{j-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u(\zeta) - u(\zeta_{j-\frac{1}{2}}) - \right. \\
 & \left. - (\zeta - \zeta_{j-\frac{1}{2}}) u_{\zeta}(\zeta_j)) d\zeta \right) = \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{j-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \times \\
 & \times \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{\zeta_{j-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta d\zeta \right). \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

При преобразовании выражения (3.41) используем то, что

$$\lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) d\zeta = 0,$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) u(\zeta) d\zeta = \\ = \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \times \\ \times (u(\zeta) - u(\zeta_{i-\frac{1}{2}})) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Подставим полученные результаты (3.42) — (3.44) в формулу (3.41), тогда она преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \lambda \sum_{j=1}^n h \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) u(\zeta_{i-\frac{1}{2}}) + \\ + \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{i-\frac{1}{2}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta d\zeta \right) + \\ + \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) (u(\zeta) - \\ - u(\zeta_{i-\frac{1}{2}})) d\zeta, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) u(\zeta_{i-\frac{1}{2}}) + \lambda R_i^{(1)} + \\ + \lambda R_i^{(2)} + f(x_{i-\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds (u(\zeta) - \right. \\ \left. - u(\zeta_{i-\frac{1}{2}})) \right) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$R_i^{(2)} \frac{1}{2} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta d\xi \right), i = \overline{1, n}. \quad (3.47)$$

Отбросим в (3.45)  $\lambda R_i^{(1)}$  и  $\lambda R_i^{(2)}$ , тогда получим линейную алгебраическую систему относительно неизвестных  $v_{i-\frac{1}{2}}$ :

$$v_{i-\frac{1}{2}} = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} v_{j-\frac{1}{2}} + f(x_{i-\frac{1}{2}}). \quad (3.48)$$

Вычтем (3.48) из (3.45) и примем во внимание обозначение

$$\varepsilon_{i-\frac{1}{2}} = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} v_{j-\frac{1}{2}} + f(x_{i-\frac{1}{2}}),$$

которое представляет собой разность между точным и приближенным решениями уравнения (3.1) в точках  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получим

$$(E - A) \varepsilon = \lambda R, \quad (3.49)$$

где

$$\varepsilon = (\varepsilon_{\frac{1}{2}}, \varepsilon_{\frac{3}{2}}, \dots, \varepsilon_{n-\frac{1}{2}}),$$

$$R = (R_{\frac{1}{2}}^{(1)} + R_{\frac{1}{2}}^{(2)}, \dots, R_{n-\frac{1}{2}}^{(1)} + R_{n-\frac{1}{2}}^{(2)}), \quad A = \|\lambda h A_{ij}\|_n^n.$$

Если покажем, что матрица  $E - A$  невырожденная, тогда система (3.49) будет однозначно разрешимой и будет справедлива оценка

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq |\lambda| \|(E - A)^{-1}\| \|R\|_{0, \omega_h}. \quad (3.50)$$

Докажем следующую лемму.

**Лемма 3.3.** Если выполняется условие

$$|\lambda| \left\{ \max_i \int_0^1 K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right\}^{\frac{1}{2}} < 1, \quad (3.51)$$

то матрица  $E - A$  невырожденна, обратима и справедлива оценка

$$\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}, \quad (3.52)$$

где  $q = \|A\| < 1$ .

**Доказательство.** Аналогично доказательству леммы 3.2 будем иметь

$$\begin{aligned} q = \|A\| &\leq N(\dot{A}) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \lambda \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\lambda| \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= |\lambda| \left( \max_i \int_0^1 K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} < 1, \end{aligned}$$

поэтому на основании [111] справедливо неравенство (3.52).

Оценим погрешность  $\varepsilon$  в нормах  $\|\cdot\|_{0, \omega_h}$ ,  $\|\cdot\|_{C, \omega_h}$ .

**Теорема 3.6.** Пусть выполнены условия теоремы 3.3, тогда для погрешности сеточной схемы (3.48) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{0, \omega_h} &\leq Ch^{\alpha+1} |\ln h|^{\frac{1}{2} + \alpha} \left\{ \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 + \right. \\ &\quad \left. + |u'|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)\|_{\alpha, s, \Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{0, \omega_h} &\leq Ch^{\alpha+1} \left\{ \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 + \right. \\ &\quad \left. + |u'|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\text{где } C = \sqrt{2} C_1 |\lambda| \frac{1}{1-q}.$$

**Доказательство.** В неравенстве (3.50) оценим норму  $\|R\|_{0, \omega_h}$ :

$$\|R\|_{0, \omega_h}^2 = h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)} + R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2,$$

т. е.

$$\|R\|_{0, \omega_h}^2 \leq 2h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 + 2h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2. \quad (3.55)$$

Оценим первый член неравенства (3.55), используем при этом неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned}
 h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 &= h \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)) ds d\zeta \times \right. \\
 &\quad \left. \times (u(\zeta) - u(\zeta_{i-\frac{1}{2}})) d\zeta \right\}^2 \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)) ds d\zeta \int_{\zeta_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} u'(\eta) d\eta \right\}^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{\zeta} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \right. \\
 &\quad \left. - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)) u'(\eta) ds d\zeta d\eta \right\}^2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \\
 &\quad - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2 ds d\zeta d\eta \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(\eta))^2 ds d\zeta d\eta,
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 &\leq h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \\
 &\quad - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2 d\zeta ds \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(\eta))^2 d\eta. \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Допустим  $0 \leq \alpha < 1/2$ , тогда если используем неравенства (3.16) — (3.17), то из (3.56) будем иметь

$$\begin{aligned}
 &h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 \leq \\
 &\leq h^{2\alpha} C_1^2 h \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2}{|\zeta - s|^2} |\zeta - s|^2 d\zeta ds \leq \\
 &\leq h^{2\alpha+2} C_1^2 \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2}{|\zeta - s|^2} d\zeta ds,
 \end{aligned}$$

или

$$h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2. \quad (3.57)$$

Пусть  $\alpha = 1/2$ , тогда

$$h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 \leq C_1^2 h^2 h |\ln h|^2 \|u'\|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2,$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 \leq C_1^2 h^3 |\ln h|^2 \|u'\|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2. \quad (3.58)$$

Объединив неравенства (3.57) и (3.58), получим оценку

$$h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} |\ln h|^{\frac{2\delta_1}{2},\alpha} \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2, \quad (3.59)$$

где  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ .

Сейчас рассмотрим случай, когда  $\alpha$  удовлетворяет условиям  $1/2 < \alpha \leq 1$ , тогда, используя неравенства (3.16) — (3.17), из (3.56) получим

$$\begin{aligned} & h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 \leq \\ & \leq C_1^2 h h \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} |\zeta - s|^{1+2\alpha} d\zeta ds \leq \\ & \leq C_1^2 h h h^{1+2\alpha} \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds, \end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2. \quad (3.60)$$

Оценим второй член (3.55),

$$\begin{aligned} & h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2 = h \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \times \right. \\ & \quad \times \left. \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta d\zeta \right) \right\}^2 \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta \right\}^2 = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right)^2 \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta \right)^2 \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right)^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} 1^2 d\eta d\theta \times \\
&\quad \times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} (u'(\eta) - u'(\theta))^2 d\eta d\theta \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} 1^2 ds \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} 1^2 d\eta d\theta \times \\
&\quad \times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} (u'(\eta) - u'(\theta))^2 d\eta d\theta = h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \times \\
&\quad \times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} (u'(\eta) - u'(\theta))^2 d\eta d\theta,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2 &\leq h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \times \\
&\quad \times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} (u'(\eta) - u'(\theta))^2 d\eta d\theta. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Пусть  $0 \leq \alpha < 1/2$ , применив (3.16) — (3.17), из (3.61) получим

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2 &\leq C_1^2 h h^{2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)\|_{\alpha, s, \Omega}^2 \times \\
&\quad \times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi} \frac{(u'(\eta) - u'(\theta))^2}{|\eta - \theta|^2} |\eta - \theta|^2 d\eta d\theta \leq \\
&\leq C_1^2 h h^{2\alpha} h^2 \sum_{i=1}^n \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)\|^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(u'(\eta) - u'(\theta))^2}{|\eta - \theta|^2} d\eta d\theta,
\end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \xi)\|_{\alpha, \xi, \Omega}^2 |u'|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2. \tag{3.62}$$

Если  $\alpha = 1/2$ , то использование тех же неравенств дает

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(2)})^2 \leq C_1^2 h^3 |\ln h| \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 |u'|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2. \quad (3.63)$$

Объединив (3.62) и (3.63), получим

$$h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} |\ln h| |u'|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2, \quad (3.64)$$

где  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ .

Если  $1/2 < \alpha \leq 1$ , то из (3.61) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2 &\leq C_1^2 h h \sum_{i=1}^n \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \times \\ &\times \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u'(\eta) - u'(\theta))^2}{|\eta - \theta|^{1+2\alpha}} |\eta - \theta|^{1+2\alpha} d\eta d\theta, \end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)})^2 \leq C_1^2 h^{2\alpha+2} \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 |u'|_{\alpha, \Omega}^2. \quad (3.65)$$

Оценки (3.59) и (3.64) подставим в неравенство (3.55), что дает

$$\begin{aligned} \|R\|_{0, \omega_h}^2 &\leq 2 \left( C_1^2 h^{2\alpha+2} |\ln h| |u'|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 + \right. \\ &\left. + C_1^2 h^{2\alpha+2} |\ln h| |u'|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \|R\|_{0, \omega_h} &\leq V \sqrt{2} C_1 h^{\alpha+1} |\ln h|^{\frac{\delta}{2}, \alpha} \left( \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 + \right. \\ &\left. + |u'|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.66) \end{aligned}$$

Учитывая (3.52) и (3.66), из (3.50) получаем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{0, \omega_h} &\leq C h^{\alpha+1} |\ln h|^{\frac{\delta}{2}, \alpha} \left( \|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 + \right. \\ &\left. + |u'|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где  $C = |\lambda| \frac{1}{1-q} V \sqrt{2} C_1$ .

Используя оценки (3.60) и (3.65) из неравенства (3.55), получаем

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq 2 \left\{ C_1^2 h^{2\alpha+2} \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 + \right. \\ \left. + C_1^2 h^{2\alpha+2} \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 |u'|_{\alpha,\Omega}^2 \right\},$$

т. е.

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq \sqrt{2} C_1 h^{\alpha+1} \left( \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 + \right. \\ \left. + |u'|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.67)$$

Учитывая оценки (3.52) и (3.67), из неравенства (3.50) будем иметь

$$\|\varepsilon\|_{0,\omega_h} \leq C h^{\alpha+1} \left\{ \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 + \right. \\ \left. + |u'|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n h \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,$$

где  $C = \sqrt{2} C_1 |\lambda| \frac{1}{1-q}$ .

**Теорема 3.7.** Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда для погрешности сеточной схемы (3.48) выполнима оценка

$$\|\varepsilon\|_{c,\omega_h} \leq C h^\alpha \|u'\|_{0,\Omega} \max_i |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega} + \\ + |u'|_{\alpha,\Omega} \max_i \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.68)$$

где  $C = |\lambda| \frac{1}{1-q}$ .

**Доказательство.** Оценка погрешности аппроксимации в норме  $\|\cdot\|_{c,\omega_h}$  имеет следующий вид:

$$\|\varepsilon\|_{c,\omega_h} \leq |\lambda| \|(E - A)^{-1}\|_1 \|R\|_{c,\omega_h}, \quad (3.69)$$

где  $\|\varepsilon\|_{c,\omega_h} = \max_i |\varepsilon_i|$ , а  $\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ ,  $a_{ij}$  — элементы матрицы  $A$ . В условиях (3.51) будет выполняться оценка (3.52). В неравенстве (3.69) оценим норму  $\|R\|_{c,\omega_h}$ . Имеем

$$\|R\|_{c,\omega_h} = \max_i |R_{i-\frac{1}{2}}| = \max_i (|R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)} + R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)}|) \leq \\ \leq \max_i (|R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)}| + |R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)}|),$$

$$\|R\|_{C, \omega_h} \leq \max_i |R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)}| + \max_i |R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)}|. \quad (3.70)$$

Сначала оценим

$$\begin{aligned} \max_i |R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)}| &= \max_i \left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds) (u(\zeta) - u(\zeta_{i-\frac{1}{2}})) d\zeta \right| \leq \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)) \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} u'(\eta) d\eta ds d\zeta \right| = \\ &= \frac{1}{h} \max_i \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s)) u'(\eta) d\eta ds d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \max_i \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2 d\eta ds d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta))^2 d\eta ds d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{h} h^{\frac{1}{2}} h \max_i \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2 d\zeta ds \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(\eta))^2 d\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \leq h^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 (u')^2 d\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \max_i \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} |\zeta - s|^{1+2\alpha} d\zeta ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq h^{\frac{1}{2}} h^{\alpha + \frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 (u')^2 d\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \max_i \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds \right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n 1,$$

т. е.

$$\max_i |R_{i-\frac{1}{2}}^{(1)}| \leq h^\alpha \|u'\|_{0,\Omega} \max_i |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}, \quad (3.71)$$

где

$$\max_i |K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega} = \max_i \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x_{i-\frac{1}{2}}, \zeta) - K(x_{i-\frac{1}{2}}, s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь оценим

$$\begin{aligned} \max_i |\bar{R}_{i-\frac{1}{2}}^{(2)}| &= \max_i \left| \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta d\zeta \right) \right| = \\ &= \frac{1}{h^2} \max_i \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta)) d\eta d\theta d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h^2} \max_i \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} 1^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} 1^2 ds d\zeta d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{\zeta} (u'(\eta) - u'(\theta))^2 d\eta d\theta d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{h^2} h^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} \max_i \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(\eta) - u'(\theta))^2 d\eta d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= h^{\frac{1}{2}} \max_i \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(u'(\eta) - u'(\theta))^2}{|\eta - \theta|^{1+2\alpha}} |\eta - \theta|^{1+2\alpha} d\eta d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq h^{\frac{1}{2}} h^{\alpha + \frac{1}{2}} \max_i \left\{ \int_0^1 K^2(x_{i-\frac{1}{2}}, s) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(u'(\eta) - u'(\theta))^2}{|\eta - \theta|^{1+2\alpha}} d\eta d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n 1, \end{aligned}$$

т. е.

$$\max_i |R_{i-\frac{1}{2}}^{(2)}| \leq h^\alpha \max_i \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \xi)\|_{0,\xi,\Omega} |u'|_{\alpha,\Omega}. \quad (3.72)$$

Оценки (3.71) и (3.72) подставим в неравенство (3.70), будем иметь

$$\begin{aligned} \|R\|_{C,\omega_h} & \leq h^\alpha (\|u'\|_{0,\Omega} \max_i \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \xi)\|_{\alpha,\xi,\Omega} + \\ & + |u'|_{\alpha,\Omega} \max_i \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \xi)\|_{0,\xi,\Omega}). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Подставим оценки (3.52), (3.73) в (3.69), в результате получим

$$\begin{aligned} \|e\|_{C,\omega_h} & \leq Ch^\alpha \{ \|u'\|_{0,\Omega} \max_i \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \xi)\|_{\alpha,\xi,\Omega} + \\ & + |u'|_{\alpha,\Omega} \max_i \|K(x_{i-\frac{1}{2}}, \xi)\|_{0,\xi,\Omega} \}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned}$$

где  $C = |\lambda| \frac{1}{1-q}$ . Теорема доказана.

В сформулированных выше теоремах при оценке погрешности использовались нормы  $|u|_{\alpha,\Omega}$ ,  $|u'|_{\alpha,\Omega}$ ,  $\|u'\|_{\alpha,\Omega}$ ,  $\|u\|_{\alpha,\Omega}$ . Выразим эти нормы через правую часть в ядро. В этом случае погрешность аппроксимации будет зависеть от начальной информации — от  $(f(x), K(x, \xi))$ .

Из (3.1) получаем

$$\begin{aligned} u^2(x) & = \left\{ \lambda \int_0^1 K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) \right\}^2 \leq \\ & \leq 2 \left( \lambda^2 \int_0^1 K^2(x, \xi) d\xi \int_0^1 u^2(\xi) d\xi + f^2(x) \right), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \xi) dx d\xi \int_0^1 u^2(\xi) d\xi + \int_0^1 f^2(x) dx \right\}.$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 \|u\|_{0,\Omega}^2 + 2\|f\|_{0,\Omega}^2,$$

или

$$(1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2) \|u\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\|f\|_{0,\Omega}^2.$$

Окончательно имеем

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\|f\|_{0,\Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1}. \quad (3.74)$$

Предположим, что выполняется условие  $1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 > 0$ , тогда из (3.74) получим

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2} \|f\|_{0,\Omega} (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.75)$$

Для оценки  $|u|_{\alpha,\Omega}$  рассмотрим разность

$$(u(x) - u(s)) = \lambda \int_0^1 (K(x, \zeta) - K(s, \zeta)) u(\zeta) d\zeta + (f(x) - f(s)).$$

Возведем ее в квадрат и проинтегрируем, тогда

$$\begin{aligned} & (u(x) - u(s))^2 \leq \\ & \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 (K(x, \zeta) - K(s, \zeta))^2 d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + (f(x) - f(s))^2 \right\}, \\ & \int_0^1 \int_0^1 \frac{(u(x) - u(s))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx ds \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(s, \zeta))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx d\zeta ds \times \right. \\ & \quad \left. \times \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(f(x) - f(s))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx ds \right\}, \end{aligned}$$

или

$$|u|_{\alpha,\Omega}^2 \leq 2 \{ \lambda^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha,x,\Omega}^2 \|u\|_{0,\Omega}^2 + |f|_{\alpha,\Omega}^2 \}. \quad (3.76)$$

Подставив (3.75) в неравенство (3.76), получим

$$|u|_{\alpha,\Omega}^2 \leq 2 \{ \lambda^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha,x,\Omega}^2 2\|f\|_{0,\Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} + |f|_{\alpha,\Omega}^2 \}, \quad (3.77)$$

т. е.

$$|u|_{\alpha,\Omega} \leq \sqrt{2} \{ 2\lambda^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} |K(x, \zeta)|_{\alpha,x,\Omega}^2 \|f\|_{0,\Omega}^2 + |f|_{\alpha,\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично получим оценку  $|u'|_{\alpha,\Omega}$ :

$$\begin{aligned} & u'(x) - u'(s) = \lambda \int_0^1 (K'_x(x, \zeta) - K'_s(s, \zeta)) u(\zeta) d\zeta + (f'(x) - f'(s)), \\ & (u'(x) - u'(s))^2 \leq \\ & \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta) - K'_s(s, \zeta))^2 d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + (f'(x) - f'(s))^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(u'(x) - u'(s))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx ds \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K'_x(x, \zeta) - K'_s(s, \zeta))^2}{|x - \zeta|^{1+2\alpha}} dx d\zeta ds \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(f'(x) - f'(s))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx ds, \right.$$

т. е.

$$|u'|_{\alpha, \Omega}^2 \leq 2 \{ \lambda^2 |K'_x(x, \zeta)|_{0, \Omega \times \Omega}^2 \|u\|_{0, \Omega}^2 + |f'|_{\alpha, \Omega}^2 \}. \quad (3.78)$$

Оценку (3.75) подставим в (3.78), после чего получим

$$|u'|_{\alpha, \Omega} \leq \sqrt{2} \{ 2\lambda^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} |K'_x(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2 \|f\|_{0, \Omega}^2 + \\ + |f'|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.79)$$

Для квадрата нормы будем иметь

$$\|u\|_{\alpha, \Omega}^2 = \|u\|_{0, \Omega}^2 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds = \|u\|_{0, \Omega}^2 + |u|_{\alpha, \Omega}^2. \quad (3.80)$$

Используя (3.75) и (3.77), из соотношения (3.80) получаем

$$\|u\|_{\alpha, \Omega}^2 = 2(1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0, \Omega}^2 + \\ + 2 \{ 2\lambda^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} |K(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2 \|f\|_{0, \Omega}^2 + |f|_{\alpha, \Omega}^2 \} = \\ = 2(1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0, \Omega}^2 + \\ + 4\lambda^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0, \Omega}^2 + 2|f|_{\alpha, \Omega}^2 = \\ = 2(1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0, \Omega}^2 (1 + 2\lambda^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2) + 2|f|_{\alpha, \Omega}^2.$$

т. е.

$$\|u\|_{\alpha, \Omega} \leq \sqrt{2} \{ (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0, \Omega}^2 (1 + 2\lambda^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2) + \\ + |f|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.81)$$

и наконец оценим

$$\|u'\|_{\alpha, \Omega}^2 = \|u'\|_{0, \Omega}^2 + |u'|_{\alpha, \Omega}^2 = \int_0^1 (u'(\zeta))^2 d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(u'(x) - u'(\zeta))^2}{|x - \zeta|^{1+2\alpha}} dx d\zeta, \quad (3.82)$$

для чего потребуется оценка нормы  $\|u\|_{0, \Omega}^2$ .

Проведем ряд очевидных преобразований

$$u'(x) = \lambda \int_0^1 K'_x(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta + f'(x), \\ (u'(x))^2 \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + (f'(x))^2 \right\},$$



или

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \int_0^1 (f'(x))^2 dx \right\},$$

что приводит к оценке

$$\|u'\|_{0,\Omega}^2 \leq 4\lambda^2 \|K'_x\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0,\Omega}^2 + 2 \|f'\|_{0,\Omega}^2. \quad (3.83)$$

Подставим (3.79) и (3.83) в соотношение (3.82), в результате получим

$$\begin{aligned} \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 &\leq 4\lambda^2 \|K'_x\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0,\Omega}^2 + 2 \|f'\|_{0,\Omega}^2 + \\ &+ 4\lambda^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} |K'_x(x, \zeta)|_{\alpha,x,\Omega}^2 \|f\|_{0,\Omega}^2 + 2 |f'|_{\alpha,\Omega}^2 = \\ &= 4\lambda^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0,\Omega}^2 (\|K'_x(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 + \\ &+ |K'_x(x, \zeta)|_{\alpha,x,\Omega}^2) + 2 (\|f'\|_{0,\Omega}^2 + |f'|_{\alpha,\Omega}^2). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\|K'_x(x, \zeta)\|_{\alpha,x,\Omega}^2 = \|K'_x(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 + |K'_x(x, \zeta)|_{\alpha,x,\Omega}^2,$$

тогда будем иметь

$$|u'|_{\alpha,\Omega}^2 \leq 4\lambda^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|K'_x(x, \zeta)\|_{\alpha,\Omega \times \Omega}^2 \|f\|_{0,\Omega}^2 + 2 \|f'\|_{\alpha,\Omega}^2.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \|u'\|_{\alpha,\Omega}^2 &\leq 2 |\lambda| \left\{ (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|K'_x(x, \zeta)\|_{\alpha,x,\Omega}^2 \|f\|_{0,\Omega}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\lambda^2} \|f'\|_{\alpha,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

где

$$\begin{aligned} \|K'_x(x, \zeta)\|_{\alpha,x,\Omega}^2 &= \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K'_x(x, \zeta) - K'_x(s, \zeta))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} dx d\zeta ds. \end{aligned}$$

**Сеточные схемы для интегральных уравнений с монотонным оператором.** Пусть в уравнении

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t) u(t) dt + f(x) \quad (3.85)$$

интегральный оператор с ядром  $K(x, t)$  монотонный, т. е.

$$(Ku, u) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, t) u(t) u(x) dt dx \geq 0, \quad \forall u \in L_2(0, 1). \quad (3.86)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.8.** Пусть  $K(x, t) \in L_2((0, 1) \times (0, 1))$ ,

$f(x) \in L_2(0, 1)$ ,  $\lambda < 0$  и выполнено условие монотонности (3.86). Тогда уравнение (3.85) имеет и притом единственное решение из  $L_2(0, 1)$ .

**Доказательство.** Сформулируем задачу (3.85) как вариационную. Пусть

$$a(u, \mu) = \int_0^1 u(x) \mu(x) dx - \lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x, t) u(t) \mu(x) dt dx, \quad (3.87)$$

$$l(\mu) = \int_0^1 f(x) \mu(x) dx.$$

Вариационная задача формулируется следующим образом: найти такую функцию  $u(x) \in L_2(0, 1)$ , которая удовлетворяет тождеству

$$a(u, \mu) = l(\mu), \quad \forall \mu \in L_2(0, 1). \quad (3.88)$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$a(u, u) \geq \|u\|_{0,\Omega}^2, \quad a(u, \mu) \leq [1 + |\lambda| \|K\|_{0,\Omega \times \Omega}] \|u\|_{0,\Omega} \|\mu\|_{0,\Omega},$$

$$l(\mu) \leq \|f\|_{0,\Omega} \|\mu\|_{0,\Omega}.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы Лакса — Мильграма и, следовательно, теорема доказана.

При аппроксимации уравнения (3.85) сеточной схемой желательно, чтобы последняя имела второй порядок аппроксимации и сохраняла свойство монотонности. Это можно сделать с помощью специального усреднения. Введем усредняющий оператор  $T^x$  вида

$$T^x(u) = \frac{1}{h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) u(\xi) d\xi. \quad (3.89)$$

Данный оператор, носящий название оператора точных разностных схем, нашел широкое применение при построении и исследовании разностных схем для основных задач математической физики (см. [72] и приведенную там литературу). Своим названием оператор  $T$  обязан следующему свойству:

$$T^x(u'') = u''_{xx}(x). \quad (3.90)$$

В дальнейшем нам понадобятся и другие свойства оператора  $T^x$ , которые сформулируем в виде двух лемм.

**Лемма 3.4.**  $T^x(u) = u(x)$ ,  $\forall u(x) \in \pi_1$ , где  $\pi_1$  — множество многочленов не выше первой степени.

**Лемма 3.5** Пусть  $y(x)$  — сеточная функция, определенная на  $\omega$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ , тогда справедливо тождество

$$(T^x(F(\xi), y)) y = \int_0^1 F(\xi) \hat{y}(\xi) d\xi$$

для любой функции  $F(\xi)$ , интегрируемой на  $[0, 1]$ , где

$$(u, y) = \sum_{x \in \omega} h u(x) y(x),$$

$$\hat{y}(\xi) = y(x) - (x - \xi) y'_x(x), \quad \xi \in [x - h, x].$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} (T^x(F(\xi), y)) &= \sum_{x \in \omega} h \frac{1}{h^2} \int_{x-h}^{x+h} (h - |x - \xi|) F(\xi) d\xi y(x) = \\ &= \sum_{x=h} \frac{1}{h} \left[ \int_x^{x+h} (x + h - \xi) F(\xi) d\xi y(x) + \int_x^{x+h} (\xi - x) F(\xi) d\xi y(x + h) \right] + \\ &+ \frac{1}{h} \int_0^h \xi F(\xi) d\xi y(h) + \frac{1}{h} \int_{1-h}^h (1 - \xi) F(\xi) d\xi y(1 - h). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом нулевых краевых условий для сеточной функции  $y(x)$  получаем утверждение леммы.

Выберем в тождестве (3.88) в качестве пробной функции следующие выражения:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq x - h, \\ h - |x - \xi|, & |x - \xi| \leq h, \\ 0, & x + h \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

тогда с учетом (3.89) получим интегральное следствие

$$T^x(u(\xi)) = \lambda T^x \left( \int_0^1 K(\xi, t) u(t) dt \right) + T^x(f(\xi)), \quad x \in \omega, \quad (3.91)$$

которое является основой построения сеточной схемы вида

$$v(x_i) = \lambda \sum_{i=1}^n T^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_j} K(\xi, t) \hat{v}(t) dt + T^{x_i}(f), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (3.92)$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.6.** Сумматорный оператор сеточного уравнения (3.92) является монотонным.

Доказательство. С помощью леммы 3.5 получаем

$$T^x \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_j} K(\xi, t) \hat{v}(t) dt, \quad v(x) = \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, t) \hat{v}(t) dt \hat{v}(\xi) d\xi \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Если представить сеточную схему (3.92) в векторном виде

$$Av = \varphi, \quad (3.93)$$

где  $v = (v(x_i))_{i=1}^n$ ,  $\varphi = (T^{x_i}(f))_{i=1}^n = (\varphi(x_i))_{i=1}^n$ ,

$$(Av)_i = v(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n T^{x_i} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_j} K(\xi, t) \hat{v}(s) dt \right),$$

то можно показать однозначную разрешимость системы. Действитель-

но матрица  $A$  является положительно определенной, т. е.

$$(Av, v) \geq \|v\|_{0,\omega}^2,$$

что просто проверяется использованием леммы.

На основании известных результатов (см., например, [111, с. 134]), получаем существование ограниченной обратной матрицы  $A^{-1}$ , причем

$$\|A^{-1}\| \leq 1. \quad (3.94)$$

Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 3.9.** Пусть выполнены условия теоремы 3.8, тогда система линейных алгебраических уравнений (3.93), а вместе с ней сеточная схема (3.92) имеют решение, притом единственное, для которого справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{0,\omega} \leq \|\varphi\|_{0,\omega}. \quad (3.95)$$

**Замечание 3.1.** Правую часть в неравенстве (3.95) можно оценить в явном виде через  $\|f\|_{0,\Omega}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{0,\omega} &= \sup \frac{|(\varphi, v)|}{\|v\|_{0,\omega}} = \sup \frac{|(T^x(f), v)|}{\|v\|_{0,\omega}} = \sup \frac{\left| \int_0^1 f(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi \right|}{\|v\|_{0,\omega}} \leq \\ &\leq \left[ \int_0^1 f^2(\xi) d\xi \right]^{1/2} \sup \frac{\left\{ \int_0^1 [\hat{v}(\xi)]^2 d\xi \right\}^{1/2}}{\|v\|_{0,\omega}} \leq \sqrt{\frac{10}{3}} \|f\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Перейдем к исследованию точности сеточной схемы (3.87). Введем погрешность

$$z(x_i) = v(x_i) - u(x_i), \quad i = 1, \overline{n-1}; \quad z(0) = z(1) = 0,$$

тогда из (3.91), (3.92) получаем

$$z(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^n T^{x_i} \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(\xi, t) \hat{z}(t) dt \right) + R_i, \quad (3.96)$$

где

$$R_i = \lambda \sum_{j=1}^n T^{x_i} \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(\xi, t) [\hat{u}(t) - u(t)] dt - [u(x_i) - T^{x_i}(u)] \right), \quad (3.97)$$

или в векторной форме

$$Az = R, \quad R = (R_i)_{i=1}^{n-1}.$$

Согласно (3.94) для погрешности  $z$  получаем априорную оценку

$$\|z\|_{0,\omega} \leq \|R\|_{0,\omega}, \quad (3.98)$$

из которой уже можно установить скорость сходимости сеточной схемы (3.92). Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.7.**  $\forall u(x) \in W_2^{1+\alpha}(0, 1)$  выполняема оценка

$$\|R\|_{0,\omega} \leq Mh^{1+\alpha} |u|_{1+\alpha,\Omega}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Доказательство. Используем представление

$$\hat{u}(t) - u(t) = \frac{1}{h} \int_t^x \int_{x-h}^x [u'(\eta) - u'(\xi)] d\xi d\eta, \quad -x-h \leq t \leq x,$$

с учетом определения нормы  $|\cdot|_{\alpha, \Omega}$  будем иметь

$$\max_{t \in [x-h, x]} |\hat{u}(t) - u(t)| \leq \frac{h^{1+\alpha}}{\sqrt{h}} |u|_{1+\alpha, (x-h, x)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.99)$$

На основании определения  $R_i$  и неравенства (3.99) получаем

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq |\lambda| T^{x_i} \left( \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(\xi, t)| |\hat{u}(t) - u(t)| dt \right) \leq |T^{x_i}(u) - u(x_i)| \leq \\ &\leq |\lambda| h^{1+\alpha} T^{x_i} \left( \left( \int_0^1 |K(\xi, t)|^2 dt \right)^{1/2} \right) |u|_{1+\alpha, \Omega} + \frac{h^{1+\alpha}}{\sqrt{h}} |u|_{1+\alpha, (x_{i-1}, x_{i+1})}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\|R\|_{0, \omega} \leq \sqrt{2} h^{1+\alpha} \left\{ \left\| T^x \left( \left( \int_0^1 |K(\xi, t)|^2 dt \right)^{1/2} \right) \right\|_{0, \omega} |u|_{1+\alpha, \Omega} |\lambda| + |u|_{1+\alpha, \Omega} \right\},$$

или с учетом замечания 1

$$\|R\|_{0, \omega} \leq \sqrt{2} h^{1+\alpha} \left\{ \sqrt{\frac{10}{3}} |\lambda| \|K(\xi, t)\|_{0, \Omega \times \Omega} + \sqrt{2} \right\} |u|_{1+\alpha, \Omega}.$$

Здесь при оценке функционала  $T^{x_i}(u) - u(x_i)$  была использована лемма Брэмбла — Гильберта. Лемма доказана. Лемма 3.7. вместе с оценкой (3.98) и теоремой 3.8 убеждают в справедливости следующей теоремы.

**Теорема 3.10.** Пусть выполнены условия теоремы 3.8 и

$$\|K'_x(x, f)\|_{\alpha, x, \Omega} < \infty, \quad f(x) \in \omega_2^{1+\alpha}(0, 1),$$

тогда точность сеточной схемы (3.92) определяется оценкой

$$\|v - u\|_{0, \omega} \leq N h^{1+\alpha} |u|_{1+\alpha, \Omega}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

**Замечание 3.2.** На основании известных теорем вложения  $W_2^k(0, 1) \subset C[0, 1]$  при  $0,5 < k$  и, следовательно, для  $u(x) \in W_2^{1+\alpha}(0, 1)$  имеет смысл  $u(x_i) \forall x_i \in \bar{\omega}$  и все выкладки, встречающиеся в доказательстве теоремы 3.10 и использующие величину  $v(x_i) - u(x_i)$ , являются обоснованными. Заключение теоремы останется справедливым при замене  $T^x(f)$  на  $f(x)$ .

**Замечание 3.3.** Если гладкость решения интегрального уравнения (3.85) ниже, чем  $W_2^1(0, 1)$ , вместо сеточной схемы (3.92) можно приме-

нить более простую

$$v(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(\xi, t) dt d\xi v(x_j) + \\ + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi) d\xi, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (3.100)$$

имеющую первый порядок аппроксимации.

Интегральное следствие, служащее отправной точкой для построения и исследования сеточной схемы получается из тождества (3.88), если в качестве пробной функции взять выражение

$$\mu(\xi) = \frac{1}{h} \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq x-h, \\ 1, & 0 \leq x-\xi \leq h, \\ 0, & x \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

и оно имеет вид

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi) d\xi = \lambda \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_0^1 K(\xi, t) u(t) dt d\xi + \\ + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi) d\xi, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.101)$$

Если ввести обозначение  $\bar{v}(t) = v(x_j)$ ,  $x_{j-1} \leq t \leq x_j$ , то по аналогии с предыдущим можно показать, что сумматорный оператор в (3.100) является монотонным и, следовательно, сеточная схема (3.100) имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\|v\|_{0,\omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}.$$

Будет справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.11.** Пусть выполнены условия теоремы 3.8 и

$$\|K(x, t)\|_{\alpha, x, \Omega} < \infty, \quad f(x) \in W_2^\alpha(0, 1), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

тогда точность сеточной схемы (3.100) будет определяться оценкой

$$\left\| v - \frac{1}{h} \int_{x-h}^x u(\xi) d\xi \right\|_{0,\omega} \leq M h^\alpha |u|_{\alpha, \Omega}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Доказательство во многом сходно с доказательством теоремы 3.8, поэтому опускается.

**Замечание 3.4.** Изложенные результаты распространяются на нелинейные интегральные уравнения (Гаммерштейна, Урысона) с монотонным оператором.

#### § 4. Решение нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна

Рассматривается интегральное уравнение Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + f(x). \quad (4.1)$$

Справедлива следующая теорема существования [50, с. 375, 400].

**Теорема 4.0.** Пусть  $K(x, \zeta)$  — измеримая по совокупности аргументов функция, принадлежащая пространству  $L_2((0, 1) \times (0, 1))$ . Пусть далее функция

$$F(\zeta, u) \quad (\zeta \in (0, 1), -\infty < u < \infty)$$

1) почти для всех  $\zeta \in (0, 1)$  непрерывна по  $u$  и  $\forall n \in (-\infty, \infty)$ , измерима по  $\zeta$  на  $(0, 1)$  (условие Каратеодори);

2) удовлетворяет неравенству

$$|F(\zeta, u)| \leq a(\zeta) + b|u|,$$

где  $a(\zeta) \in L_2(0, 1)$ ,  $b$  — постоянная;

3)  $\forall u_1, u_2 \in (-\infty, \infty)$  и  $\zeta \in (0, 1)$  выполняется условие Липшица

$$|F(\zeta, u_1) - F(\zeta, u_2)| \leq L(\zeta) |u_1 - u_2|,$$

где функция  $L(\zeta)$  измерима, и

$$\Lambda = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) L^2(\zeta) d\zeta dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Тогда при  $|\lambda| < \Lambda^{-1}$  и  $f(x) \in L_2(0, 1)$  уравнение (4.1) имеет в  $L_2(0, 1)$  единственное решение.

Сформулируем следующую теорему.

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены условия теоремы 4.0. Если  $f(x) \in W_2^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , а ядро удовлетворяет неравенству

$$\left\{ \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2 + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(y, \zeta))^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy d\zeta \right\}^{1/2} < \infty,$$

тогда  $u(x) \in W_2^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим оператор

$$Tu = F(x) = \int_0^1 K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta.$$

Для него имеем

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{\alpha, \Omega} &= \|F(x)\|_{\alpha, \Omega} = \left\{ \|F(x)\|_{0, \Omega}^2 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(F(x) - F(y))^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2 dx + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\left( \int_0^1 K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta - \int_0^1 K(y, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2}{|x-y|^{1+2\alpha}} dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
& = \left\{ \int_0^1 F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega}^2 + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(y, \zeta))^2}{|x-y|^{1+2\alpha}} dx dy d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

поэтому  $u_1(x) \in W_2^\alpha(0, 1)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Теорема доказана. Построим дискретную аппроксимацию уравнения (4.1), для этого проинтегрируем его на отрезке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ :

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx = \lambda \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x, \zeta) dx F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Интеграл по  $\zeta$  разобьем на  $n$  частей:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx &= \lambda \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x, \zeta) dx F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + \\
&+ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.
\end{aligned} \quad (4.2)$$

К ядру  $K(x, \zeta)$  добавим и отнимем величину  $\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dt$ , тогда формула (4.2) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx &= \lambda \sum_{j=1}^n h \left( \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dx dt \right) \times \\
&\times \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x, \zeta) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dt \right) F(\zeta, u(\zeta)) dx d\zeta + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \right.
\end{aligned}$$



Введем обозначения:

$$A_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dx dt,$$

$$R_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( K(x, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dt \right) F(\zeta, u(\zeta)) dx d\zeta.$$

Тогда получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx &= \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right) + \lambda R_i + \\ &+ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx &= \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) d\zeta \right) + \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F(\zeta, u(\zeta)) - F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right) d\zeta + \\ &+ \lambda R_i + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \end{aligned}$$

Введем далее обозначение

$$R_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F(\zeta, u(\zeta)) - F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right) d\zeta \right),$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx &= \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) d\zeta \right) + \\ &+ \lambda R_i^{(1)} + \lambda R_i + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отбрасывание остаточных членов приводит к линейной алгебраической системе

$$v_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(\zeta, v_j) d\zeta \right) + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (4.4)$$

Из (4.3) вычтем (4.4) и введем обозначение

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx - v_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.5)$$

тогда получим

$$\varepsilon_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F \left( \zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right) - F(\zeta, v_j) \right) d\zeta \right) + \lambda R_i^{(1)} + \lambda R_i. \quad (4.6)$$

Пусть функция  $F(\xi, u)$  ( $\xi \in (0, 1)$ ,  $-\infty < u < \infty$ ) почти при всех  $\xi \in (0, 1)$  имеет производную  $F'_u(\xi, u)$ .

Используем теорему Лагранжа о конечных приращениях для функции  $F(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds)$ , тогда будем иметь

$$F \left( \zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right) = F(\zeta, v_j) + \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds - v_j \right) F'_u(\zeta, \eta_j), \quad (4.7)$$

где

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \leq \eta_j \leq v_j,$$

а  $F(\zeta, u(\zeta))$  — непрерывна и непрерывно дифференцируема по  $u$ . Подставим (4.7) в (4.6) и используем (4.5), получим

$$\varepsilon_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \varepsilon_j \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(\zeta, \eta_j) d\zeta \right) + \lambda R_i^{(1)} + \lambda R_i. \quad (4.8)$$

Введем обозначения

$$B_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(\zeta, \eta_j) d\zeta,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda h B_1 A_{11} & -\lambda h B_2 A_{12} & \dots & -\lambda h B_n A_{1n} \\ -\lambda h B_1 A_{21} & 1 - \lambda h B_2 A_{22} & \dots & -\lambda h B_n A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda h B_1 A_{n1} & -\lambda h B_2 A_{n2} & \dots & 1 - \lambda h B_n A_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T, \quad R = (R_1^{(1)} + R_1, R_2^{(1)} + R_2, \dots, R_n^{(1)} + R_n).$$

В этих обозначениях система (4.8) примет следующий вид:

$$A\varepsilon = \lambda R,$$

или

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq |\lambda| \|A^{-1}\| \|R\|_{0, \omega_h}. \quad (4.9)$$

Покажем, что матрица  $A$  имеет обратную ограниченную матрицу. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 4.1.** Если  $|\lambda| \|B\| K(x, \zeta) \|_{0, \Omega \times \Omega} < 1$ , то матрица  $A = EA_1$  обратима и справедлива оценка

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}, \quad (4.10)$$

где  $B = \max_i \max_{\eta_j} |B_{ij}|$ ,  $\Omega = [0, 1]$ ,  $q = \|A_1\|$ .

**Доказательство.** Матрицу  $A$  запишем в виде

$$A = E - A_1,$$

где  $E$  — единичная матрица, а

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda h B_1 A_{11} & \dots & \lambda h B_n A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda h B_1 A_{n1} & \dots & \lambda h B_n A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если покажем, что  $\|A_1\| = q < 1$ , то теорема будет доказана. Здесь  $\|A_1\|$  — спектральная норма.

Рассмотрим сферическую норму  $N(A_1) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , где

$a_{ij}$  — элементы матрицы  $A_1$ .

Справедливо неравенство

$$\|A_1\| \leq N(A_1).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} N(A_1) &= \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \lambda \frac{1}{h} B_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dx dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\lambda| B \left( \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dx dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\lambda| B \left( \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| B \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega} < 1, \end{aligned}$$

т. е.

$$q = \|A_1\| \leq N(A_1) \leq |\lambda| B \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega} < 1,$$

поэтому

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}.$$

**Лемма доказана.**

**Теорема 4.2.** Пусть функция  $F(\zeta, u)$  ( $\zeta \in (0, 1)$ ,  $-\infty < u < \infty$ ) почти при всех  $\zeta \in (0, 1)$  имеет производную  $F'_u(\zeta, u)$ , выполняются

условия леммы 4.1 и теоремы 4.1, тогда имеем оценку

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^\alpha \{ \| L(\zeta) \|_{0, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \|_{\alpha, \zeta, \Omega} | u(\zeta) |_{\alpha, \Omega}^2 + \\ + \| F(\zeta, u(\zeta)) \|_{\alpha, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \}^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \quad (4.11)$$

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^\alpha | \ln h |^{\frac{1}{2}, \alpha} \{ \| L(\zeta) \|_{0, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{0, x, \Omega} \|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 | u(\zeta) |_{\alpha, \Omega}^2 + \\ + \| F(\zeta, u(\zeta)) \|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{\alpha, \zeta, \Omega} \}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad (4.12)$$

где

$$[K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^{1+2(1-\alpha)}} d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ |K(x, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt,$$

$\delta_{\alpha, \beta}$  — символ Кронекера,  $C = |\lambda| \frac{1}{1-q} V\sqrt{2}$ .

Доказательство. В неравенстве (4.9) оценим

$$\| R \|_{0, \omega_h}^2 = h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)} + R_i)^2 \leq 2 \left( h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 + h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 \right). \quad (4.13)$$

Оценим первое слагаемое в (4.13):

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 = h \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n h A_{ij} \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F(\zeta, u(\zeta)) - \right. \right. \\ \left. \left. - F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right) d\zeta \right\}^2 \leq \\ \leq nh \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F(\zeta, u(\zeta)) - F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right) d\zeta \right\}^2 \leq \\ \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x, t) dx dt \right)^2 h \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F(\zeta, u(\zeta)) - \right. \\ \left. - F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right)^2 d\zeta.$$

Так как  $F(\zeta, u(\zeta))$  удовлетворяет условию Липшица, то

$$\left| F(\zeta, u(\zeta)) - F\left(\zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right| \leq L(\zeta) \left| u(\zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right|,$$

поэтому

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq \frac{1}{h^2} h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x, t) dx dt \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( L(\zeta) \left| u(\zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right| \right)^2 d\zeta \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x, t) dx dt \times \\ &\times \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u(\zeta) - u(s)) ds \right)^2 d\zeta \leq \\ &\leq \frac{1}{h^2} h^{2\alpha+1} \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x, t) dx dt \times \\ &\times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq h^{2\alpha-1} \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [K(x, \zeta)]_{0, \zeta, \zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j}^2 dx \times \\ &\times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $[K(x, \zeta)]_{0, \zeta, \zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j}^2 = \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x, \zeta) d\zeta$ .

Если  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , то

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq h^{2\alpha-1} h^{2(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega}^2 d\zeta \times \\ &\times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \leq \\ &\leq h^{2\alpha} \|L(\zeta)\|_{0, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2 \|u(\zeta)\|_{\alpha, \Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь

$$[K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^{1+2(1-\alpha)}} d\zeta dt.$$

Если  $\alpha = \frac{1}{2}$ , то из (4.14) имеем

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq \frac{1}{h^2} h^2 \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x, \zeta) dx d\zeta \times \\ &\times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^2} d\zeta ds. \end{aligned}$$

Используем (3.16) — (3.17), в результате получим

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta \times \\ &\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^2} d\zeta ds = \\ &= \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [K(x, \zeta)]_{0, x, \Omega}^2 d\zeta \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^2} d\zeta ds \leq \\ &\leq \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta |\ln h|^2 \| [K(x, \zeta)]_{0, x, \Omega} \|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 |u(\zeta)|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 \leq h |\ln h| \|L(\zeta)\|_{0, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{0, x, \Omega} \|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 |u(\zeta)|_{\frac{1}{2}, \Omega}^2. \quad (4.16)$$

Если  $\frac{1}{2} < \zeta \leq 1$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 &\leq \frac{1}{h^2} \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x, t) dx dt \times \\ &\times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u(\zeta) - u(s))^2 d\zeta ds \leq \\ &\leq \frac{1}{h^2} h^{2\alpha+1} \int_0^1 L^2(\zeta) d\zeta \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} K^2(x, t) dx dt \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^{1+2\alpha}} d\zeta ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq h^{2\alpha-1} \int_0^1 L^2(\xi) d\xi \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [K(x, \xi)]_{0,x,\Omega}^2 dx \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(u(\xi) - u(s))^2}{|\xi - s|^{1+2\alpha}} ds d\xi \leq \\
&\leq h^{2\alpha-1} h \int_0^1 L^2(\xi) d\xi \| [K(x, \xi)]_{0,x,\Omega} \|_{\alpha,\xi,\Omega}^2 \| u(\xi) \|_{\alpha,\Omega}^2 \leq \\
&\leq h^{2\alpha} \| L(\xi) \|_{\alpha,\Omega}^2 \| [K(x, \xi)]_{0,x,\Omega} \|_{\alpha,\xi,\Omega}^2 \| u(\xi) \|_{\alpha,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)})^2 \leq h^{2\alpha} \| L(\xi) \|_{\alpha,\Omega}^2 \| [K(x, \xi)]_{0,x,\Omega} \|_{\alpha,\xi,\Omega}^2 \| u(\xi) \|_{\alpha,\Omega}^2. \quad (4.17)$$

Оценим

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F^2(\xi, u(\xi)) d\xi \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (K(x, \xi) - \\
&\quad - K(x, t))^2 dx d\xi dt.
\end{aligned} \quad (4.18)$$

Пусть  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ; тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F^2(\xi, u(\xi)) d\xi \times \\
&\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \xi) - K(x, t))^2}{|\xi - t|^{1+2(1-\alpha)}} |\xi - t|^{1+2(1-\alpha)} d\xi dt dx \leq \\
&\leq \frac{1}{h^2} h^{1+2(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} F^2(\xi, u(\xi)) d\xi \times \\
&\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \xi) - K(x, t))^2}{|\xi - t|^{1+2(1-\alpha)}} dx d\xi dt.
\end{aligned}$$

Используем (3.16) — (3.17), благодаря чему получим

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 &\leq h^{1+2(1-\alpha)-2} h^{2\alpha} \| F(\xi, u(\xi)) \|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega}^2 dx \leq \\
&\leq h h^{2\alpha} \| F(\xi, u(\xi)) \|_{\alpha,\Omega}^2 \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} \|_{\alpha,x,\Omega}^2 \sum_{i=1}^n 1,
\end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n R_i^2 \leq h^{2\alpha} \| F(\xi, u(\xi)) \|_{\alpha,\Omega}^2 \| [K(x, \xi)]_{1-\alpha,\xi,\Omega} \|_{\alpha,x,\Omega}^2. \quad (4.19)$$

Если  $\alpha = \frac{1}{2}$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 &\leq \frac{1}{h^2} h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \times \\ &\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^2} dx d\zeta dt \leq \\ &\leq h |\ln h|^2 \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^2} dx d\zeta dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 \leq h |\ln h|^2 \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 |K(x, \zeta)|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2, \quad (4.20)$$

где

$$|K(x, \zeta)|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^2} dx d\zeta dt.$$

Если  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ , то

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \times \\ &\times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^{1+2\alpha}} |\zeta - t|^{1+2\alpha} dx d\zeta dt \leq \\ &\leq \frac{1}{h^2} h^{1+2\alpha} \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha, \Omega}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, t))^2}{|\zeta - t|^{1+2\alpha}} \times \\ &\times dx d\zeta dt \leq h^{2\alpha} \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha, \Omega}^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$h \sum_{i=1}^n (R_i)^2 \leq h^{2\alpha} \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2. \quad (4.21)$$

Пусть  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ , тогда если в (4.13) подставим оценку (4.15), (4.19), то, получим

$$\begin{aligned} \|R\|_{0, \omega_h}^2 &\leq 2 \{ h^{2\alpha} \|L(\zeta)\|_{0, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2 \|u(\zeta)\|_{\alpha, \Omega}^2 + \\ &+ h^{2\alpha} \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha, \Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha, \zeta, \Omega} \|_{\alpha, x, \Omega}^2 \}, \end{aligned}$$



т. е.

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq \sqrt{2} h^\alpha \{ \|L(\zeta)\|_{0,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha,\zeta,\Omega}^2 \| u(\zeta) \|_{\alpha,\Omega}^2 + \\ + \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{1-\alpha,\zeta,\Omega}^2 \|_{\alpha,x,\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

Допустим  $\alpha = \frac{1}{2}$ , тогда если в неравенство (4.13) подставим (4.16), (4.20), то получим

$$\|R\|_{0,\omega_h}^2 \leq 2 \{ h |\ln h|^2 \|L(\zeta)\|_{0,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{0,x,\Omega}^2 \|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2 \| u(\zeta) \|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 + \\ + h |\ln h|^2 \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2 \},$$

т. е.

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq \sqrt{2} h^{\frac{1}{2}} |\ln h| \{ \|L(\zeta)\|_{0,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{0,x,\Omega}^2 \|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2 \| u(\zeta) \|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 + \\ + \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.23)$$

Пусть, наконец,  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ , тогда если в (4.16) подставим оценки (4.17), (4.21), то будем иметь

$$\|R\|_{0,\omega_h}^2 \leq 2 \{ h^{2\alpha} \|L(\zeta)\|_{0,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{0,x,\Omega}^2 \|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \| u(\zeta) \|_{\alpha,\Omega}^2 + \\ + h^{2\alpha} \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \},$$

или

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq \sqrt{2} h^\alpha \{ \|L(\zeta)\|_{0,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{0,x,\Omega}^2 \|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \| u(\zeta) \|_{\alpha,\Omega}^2 + \\ + \|F(\zeta, u(\zeta))\|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \| [K(x, \zeta)]_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.24)$$

Учитывая в (4.9) неравенства (4.10) и (4.22), (4.23), (4.24), получаем неравенства (4.11) — (4.12). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (4.1) в пространстве  $W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.3.** Пусть выполнимы условия теоремы 4.0,  $f(x) \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ , ядро  $K(x, \zeta)$  удовлетворяет неравенству

$$\|K(x, \zeta)\|_{\alpha,x,\Omega}^2 + \|K'_x(x, \zeta)\|_{\alpha,x,\Omega}^2 < \infty, \quad (4.25)$$

где

$$\|K(x, \zeta)\|_{\alpha,x,\Omega} = \left\{ \|K(x, \zeta)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx dt d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}},$$

тогда решение уравнения (4.1)  $u(x) \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Доказательство. Для оператора

$$Tu = \int_0^1 K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta,$$

имеем

$$\|Tu\|_{1+\alpha, \Omega} = \left\{ \|Tu\|_{1, \Omega} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(Tu(x) - Tu(t))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \frac{((Tu(x))' - (Tu(t))')^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\|Tu\|_{1+\alpha, \Omega} = \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2 dx + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \int_0^1 K'_x(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2 dx + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^1 K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta - \int_0^1 K(t, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^1 K'_x(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta - \int_0^1 K'_t(t, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta \int_0^1 F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta \int_0^1 F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \int_0^1 F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K'_x(x, \zeta) - K'_t(t, \zeta))^2}{|x-t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \int_0^1 F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$\|Tu\|_{1+\alpha, \Omega} \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \zeta) dx d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 (K'_x(x, \zeta))^2 dx d\zeta + \right.$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt + \\ + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K'_x(x, \zeta) - K'_t(t, \zeta))^2}{|x - t|^{1+2\alpha}} dx d\zeta dt \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 F^2(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}},$$

поэтому при условии (4.25) решение уравнения (4.1) — функция  $u(x)$  — будет принадлежать пространству  $W_2^{1+\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Теорема доказана.

Интеграл по  $\zeta$  разобьем на  $n$  равных частей:

$$u(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x, \zeta) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + f(x). \quad (4.26)$$

Преобразуем (4.26) к следующему виду:

$$u(x) = \lambda \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x, t) dt \right) \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right) + \\ + \lambda \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( K(x, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x, t) dt \right) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta + f(x) \quad (4.27)$$

Подставив в (4.27) значения  $x = x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , получим

$$u(x_i) = \lambda \sum_{i=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta \right) + \lambda R_i + f(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (4.28)$$

где

$$A_{ij} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_j} K(x_i, t) dt, \\ R_i = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_j} \left( K(x_i, \zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_j} K(x_i, t) dt \right) F(\zeta, u(\zeta)) d\zeta, \\ i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Или получим

$$u(x_i) = \lambda \sum_{i=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_j} F(\zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j)) d\zeta \right) + \\ + \lambda R_i^{(1)} + \lambda R_i + f(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (4.29)$$

где

$$R_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n h A_{ij} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_j} (F(\zeta, u(\zeta)) - F(\zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j))) d\zeta \right\}.$$

Отбрасыванием остаточных членов соотношение (4.29) приводится к нелинейной алгебраической системе

$$v_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(\zeta, v_j + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}) d\zeta \right) + f(x_i). \quad (4.30)$$

Вычитая (4.30) из (2.29) и вводя обозначения

$$\varepsilon_i = u(x_i) - v_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (4.31)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (F(\zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j)) - \right. \\ \left. - F(\zeta, v_j + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j})) d\zeta \right\} + \lambda R_i^{(1)} + \lambda R_i, \quad i = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Используем теорему Лагранжа о конечных приращениях для функций  $F(\zeta, u(\zeta))$ , в результате получим

$$\begin{aligned} F(\zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j)) - F(\zeta, v_j + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}) = \\ = F'_u(\zeta, \eta_j(\zeta)) (u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j) - v_j - (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

где

$$u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j) \leq \eta_j(\zeta) \leq v_j + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}.$$

Здесь мы допускаем, что  $F(\zeta, u)$  ( $\zeta \in (0, 1)$ ,  $-\infty < u < \infty$ ) почти при всех  $\zeta \in (0, 1)$  имеет производную  $F'_u(\zeta, u)$ .

Подставим (4.33) в (4.32) и используем (4.31), в результате чего получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(\zeta, \eta_j(\zeta)) d\zeta \right) \left( \varepsilon_j + (\zeta - x_j) \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}}{h} \right) d\zeta + \\ + \lambda R_i^{(1)} + \lambda R_i, \quad i = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(\zeta, \eta_j(\zeta)) \left( 1 + \frac{\zeta - x_j}{h} \right) d\zeta,$$

$$b_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(\zeta, \eta_j(\zeta)) \frac{x_j - \zeta}{h} d\zeta, \quad j = \overline{1, n},$$

тогда

$$\varepsilon_i = \lambda \sum_{j=1}^n h A_{ij} \{a_j \varepsilon_j + b_j \varepsilon_{j-1}\} + \lambda R_i^{(1)} + \lambda R_i, \quad i = \overline{0, n},$$

или

$$\varepsilon_i = \lambda h \sum_{j=0}^n (A_{i,j} a_j + A_{i,j+1} b_{j+1}) \varepsilon_j + \lambda R_i + \lambda R_i^{(1)}, \quad (4.34)$$

где  $a_0 = b_{n+1} = 0$ .

Используя обозначения

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j}a_j + A_{i,j+1}b_{j+1}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n},$$

$\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)^T$ ,  $R = (R_0 + R_0^{(1)}, \dots, R_n + R_n^{(1)})^T$ ,  $A = \|\lambda h A_{ij}\|_0^n$ ,  
запишем (4.34) в векторном виде

$$(E - A)\varepsilon = \lambda R. \quad (4.35)$$

Отсюда получим оценку

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq |\lambda| \|(E - A)^{-1}\| \|R\|_{0, \omega_h}, \quad (4.36)$$

если матрица  $E - A$  невырожденная. Невырожденность матрицы  $E - A$  устанавливает следующая лемма.

**Лемма 4.2.** Если

$$2|\lambda| |\mu| \left\{ \sum_{i=0}^n h \|K(x_i, t)\|_{0, \Omega} \right\}^{\frac{1}{2}} < 1,$$

то матрица  $E - A$  обратима и справедлива оценка

$$\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q},$$

где

$$\Omega = [0, 1]; \quad q = \|A\|; \quad \mu^2 = \max_i \max_{u \in L_2(0,1)} \left( \frac{1}{3h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (F'(\zeta, u(\zeta)))^2 d\zeta \right).$$

**Доказательство.** Нетрудно показать, что выполняема оценка

$$\begin{aligned} q = \|A\| &\leq N(A) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\lambda h \tilde{A}_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= |\lambda| \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h^2 (A_{i,j}a_j + A_{i,j+1}b_{j+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\lambda| \left\{ 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n h^2 \left( a_j^2 \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_i, t) dt \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_{j+1}^2 \left( \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K^2(x_i, t) dt \right) \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Если  $\mu^2 = \max_i (\max_j a_j^2, \max_j b_{j+1}^2)$ , то

$$\begin{aligned} N(A) &\leq |\lambda| |\mu| \left\{ 4 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n h \int_{x_{j-1}}^{x_j} K^2(x_i, t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2|\lambda| |\mu| \left\{ \sum_{i=0}^n h \|K(x_i, t)\|_{0, \Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Найдем оценку для  $\mu^2$ ; для этого оценим величины  $a_j^2$  и  $b_{j+1}^2$ :

$$\begin{aligned} a_j^2 &= \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(\zeta, \eta_j(\zeta)) \left( 1 + \frac{\zeta - x_j}{2} \right) d\zeta \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F'_u(\zeta, \eta_j(\zeta))^2 d\zeta \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( 1 + \frac{\zeta - x_j}{h} \right)^2 d\zeta \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{3h} \max_{u \in L_2(0,1)} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (F'(\zeta, u(\zeta))^2 d\zeta \leq \mu^2 \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Аналогично получаем

$$b_{j+1}^2 \leq \mu^2, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (4.38)$$

Если примем во внимание оценки (4.37) и (4.38), то получим

$$M^2 = \max_i (\max_j a_j^2, \max_j b_{j+1}^2) = \mu^2.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} q = \|A\| \leq N(A) &\leq 2 \|\lambda\| \|\mu\| \left\{ \sum_{i=0}^n h \|K(x_i, t)\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < 1 \\ u' \| (E - A)^{-1} \| &\leq \frac{1}{1 - q}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Теорема 4.4.** Пусть  $f(x) \in W_2^{1+\alpha}$  и выполнены условия теоремы 4.3 и леммы 4.2, тогда будут справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|e\|_{0,\omega_h} &\leq Ch^{\alpha+1} |\ln h|^{\frac{1}{2},\alpha} \left\{ \|L\|_{0,\Omega}^2 |u'|_{\frac{1}{2},\Omega}^2 \sum_{i=0}^n h \|K(x_i, t)\|_{\alpha,t,\Omega}^2 + \right. \\ &+ 2 \|F(s, u(s))\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=0}^n h \left| \frac{\partial K(x_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2 + \\ &\left. + 2 \|\Phi'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=0}^n h \|K(x_i, \zeta)\|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \|e\|_{0,\omega_h} &\leq Ch^{\alpha+1} \left\{ \|L\|_{0,\Omega}^2 |u'|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=0}^n h \|K(x_i, t)\|_{\alpha,t,\Omega}^2 + \right. \\ &+ 2 \|F(s, u(s))\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=0}^n h \left| \frac{\partial K(x_i, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 + \\ &\left. + 2 \|\Phi'\|_{\alpha,\Omega}^2 \sum_{i=0}^n h \|K(x_i, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где

$$C = |\lambda| \frac{1}{1-q} V\sqrt{2} C_1, \quad \Phi(\xi) = F(\xi, u(\xi)),$$

$$|K(x_i, \xi)|_{\alpha, \xi, \Omega} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x_i, \xi) - K(x_i, t))^2}{|\xi - t|^{1+2\alpha}} d\xi dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.2.

Оценим нормы  $|u|_{\alpha, \Omega}$ ,  $|u'|_{\alpha, \Omega}$  для решения уравнения (4.1). Рассмотрим разность

$$u(x) - u(s) = \lambda \int_0^1 (K(x, \xi) - K(s, \xi)) F(\xi, u(\xi)) d\xi + f(x) - f(s).$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(u(x) - u(s))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx ds &\leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(K(x, s) - K(s, \xi))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx d\xi ds \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^1 F^2(\xi, u(\xi)) d\xi + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(f(x) - f(s))^2}{|x - s|^{1+2\alpha}} dx ds \right\}, \end{aligned}$$

или

$$|u|_{\alpha, \Omega} \leq V\sqrt{2} \{ \lambda^2 |K(x, \xi)|_{\alpha, \xi, \Omega}^2 \|F(\xi, u(\xi))\|_{0, \Omega}^2 + |f(x)|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|F(\xi, u(\xi))\|_{0, \Omega}^2 \leq 2(b^2 \|u\|_{0, \Omega}^2 + \|a\|_{0, \Omega}^2),$$

$$\|u\|_{0, \Omega}^2 \leq [1 - 4\lambda^2 |K(x, \xi)|_{\alpha, \xi, \Omega}^2 b^2]^{-1} 2 \{ 2\lambda^2 |K(x, \xi)|_{\alpha, \xi, \Omega}^2 \|a\|_{0, \Omega}^2 + |f(x)|_{0, \Omega}^2 \}.$$

Аналогично

$$|u'|_{\alpha, \Omega} \leq V\sqrt{2} \{ \lambda^2 |K_x(x, \xi)|_{\alpha, \xi, \Omega}^2 \|F(\xi, u(\xi))\|_{0, \Omega}^2 + |f'_x(x)|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Приведенные неравенства дают возможность записать оценки скорости сходимости сеточной схемы в теоремах 4.2. и 4.4 в терминах априорной информации.

## § 5. Решение нелинейного интегрального уравнения Урысона

Рассматривается интегральное уравнение Урысона

$$u(x) = \lambda \int_0^1 F(x, \xi, u(\xi)) d\xi + f(x). \quad (5.1)$$

Справедливы следующие теоремы [50, см. с. 400]

**Теорема 5.1.** Пусть функция  $F(x, \xi, u)$ ,  $(x, \xi \in (0, 1) = \Omega)$ ,  $-\infty < u < \infty$ ,

1) почти для всех  $x, t \in \Omega \times \Omega$  непрерывна по  $u$ , а при всех  $u$  измерима на  $\Omega \times \Omega$  по совокупности переменных  $x, t$ ;

2) удовлетворяет неравенству

$$|F(x, \zeta, u)| \leq R(x, \zeta) + k|u|,$$

где  $R(x, \zeta)$  — измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 R^2(x, \zeta) d\zeta \leq k_1 < \infty;$$

$x$  — постоянная;

3) для всех  $u_1, u_2$  и  $x, \zeta \in \Omega$  выполняется неравенство

$$|F(x, \zeta, u_1) - F(x, \zeta, u_2)| \leq N(x, \zeta) |u_1 - u_2|,$$

где  $N(x, \zeta)$  измерима и

$$\Lambda^2 = \int_0^1 \int_0^1 N^2(x, \zeta) d\zeta dx < \infty.$$

Тогда при  $|\lambda| < \frac{1}{\Lambda}$  и при  $f(x) \in L_2(\Omega)$  уравнение (5.1) имеет в  $L_2(\Omega)$  единственное решение.

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены условия теоремы 5.1,  $f(x) \in W_2^\alpha$  и функция  $F(x, \zeta, u(\zeta))$  удовлетворяет неравенству

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 F^2(x, \zeta, u(\zeta)) dx d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(F(x, \zeta, u(\zeta)) - F(y, \zeta, u(\zeta)))^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy d\zeta \right\}^{1/2} < \infty, \quad \forall u(\zeta) \in L_2(0, 1),$$

(5.2)

тогда решение уравнения (5.1) принадлежит классу  $W_2^\alpha(\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Доказательство.** Для оператора  $Tu = \int_0^1 F(x, \zeta, u(\zeta)) d\zeta$ ,

имеем

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{\alpha, \Omega} &= \left\{ \|Tu\|_{0, \Omega}^2 + \right. \\ &+ \left. \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^1 F(x, \zeta, u(\zeta)) d\zeta - \int_0^1 F(y, \zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^1 F(x, \zeta, u(\zeta)) d\zeta \right)^2 dx + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{\int_0^1 (F(x, \zeta, u(\zeta)) - F(y, \zeta, u(\zeta)))^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 F^2(x, \zeta, u(\zeta)) dx d\zeta + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(F(x, \zeta, u(\zeta)) - F(y, \zeta, u(\zeta)))^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,
\end{aligned}$$

поэтому  $u(x) \in W_2^\alpha(\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Теорема доказана.

**Теорема 5.3.** Пусть выполнены условия теоремы 5.1,  $f(x) \in W_2^1(\Omega)$  и функция  $F(x, \zeta, u(\zeta))$  удовлетворяет неравенству

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 F^2(x, \zeta, u(\zeta)) dx d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial F(x, \zeta, u(\zeta))}{\partial x} \right)^2 dx d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (5.3)$$

$$\forall u(\zeta) \in L_2(\Omega),$$

тогда  $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ .

Доказательство очевидно.

**Теорема 5.4.** Пусть выполнены условия теоремы 5.1,  $f(x) \in W_2^{1+\alpha}$  и функция  $F(x, \zeta, u(\zeta))$  удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_0^1 \int_0^1 F^2(x, \zeta, u(\zeta)) dx d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(F(x, \zeta, u(\zeta)) - F(y, \zeta, u(\zeta)))^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy d\zeta + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial F(x, \zeta, u(\zeta))}{\partial x} \right)^2 dx d\zeta + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left( \frac{\partial F(x, \zeta, u(\zeta))}{\partial x} - \frac{\partial F(y, \zeta, u(\zeta))}{\partial y} \right)^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dx dy d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$\forall u(\zeta) \in L_2(\Omega),$$

тогда решение уравнения (5.1) — функция  $u(x) \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Доказательство очевидно.

Перейдем к построению сеточной схемы и исследованию ее точности. Проинтегрируем уравнение (5.1) на отрезке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  и

представим результаты в виде

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx = \lambda \sum_{j=1}^n h \left( \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F \left( x, \zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right) dx d\zeta \right) + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx + \lambda R_i, \quad (5.5)$$

где

$$R_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F(x, \zeta, u(\zeta)) - F \left( x, \zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right) \right) dx d\zeta. \quad (5.6)$$

Отбрасывание остаточного члена приводит к нелинейной сеточной схеме

$$v_i = \lambda \sum_{j=1}^n h \left( \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x, \zeta, v_j) dx d\zeta \right) + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (5.7)$$

Из (5.6) вычтем (5.7), в результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx - v_i = \\ & = \lambda \sum_{j=1}^n h \left\{ \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F \left( x, \zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right) - F(x, \zeta, v_j) \right) dx d\zeta \right\} + \\ & \quad + \lambda R_i. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Пусть выполнены условия теоремы 5.2, тогда, используя теорему Лагранжа о конечных приращениях, из (5.8) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx - v_i = \lambda \sum_{j=1}^n h \left\{ \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(x, \zeta, \eta_j) dx d\zeta \right\} \times \\ & \quad \times \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds - v_j \right) + \lambda R_i, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \leq \eta_j \leq v_j.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx - v_i, \\ A_{ij} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(x, \zeta, \eta_j) dx d\zeta, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

тогда предыдущее соотношение примет вид

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^n h A_{ij} \varepsilon_j + \lambda R_i, \quad i = \overline{1, n},$$

или в векторной форме

$$(E - A) \varepsilon = \lambda R,$$

где

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T, \quad R = (R_1, \dots, R_n)^T, \quad A = \|\lambda h A_{ij}\|_1^T.$$

Если матрица  $E - A$  невырождена, то система однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq |\lambda| \| (E - A)^{-1} \| \|R\|_{0, \omega_h}. \quad (5.10)$$

Невырожденность матрицы  $E - A$  устанавливает следующая лемма.

**Лемма 5.1.** Если

$$|\lambda| \sup_{u(\zeta) \in L_\infty(\Omega)} \left( \int_0^1 \int_0^1 (F'_u(x, \zeta, u(\zeta)))^2 dx d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} < 1, \quad (5.11)$$

то матрица  $E - A$  невырождена, система обратима и справедлива оценка

$$\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}, \quad (5.12)$$

где  $q = \|A\| < 1$ .

**Доказательство.** Из эквивалентности сферической и спектральной норм следует:

$$\|A\| \leq N(A),$$

поэтому с помощью неравенства Коши — Буняковского и неравенства (5.11) имеем

$$\begin{aligned} q = \|A\| &\leq N(A) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\lambda h A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= |\lambda| \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(x, \zeta, \eta_j) dx d\zeta \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\lambda| \left( \sum_{j=1}^n \int_0^1 \int_{x_{j-1}}^{x_j} (F'_u(x, \zeta, \eta_j))^2 dx d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} < \\ &< |\lambda| \sup_{u(\zeta) \in L_\infty(\Omega)} \left( \int_0^1 \int_0^1 (F'_u(x, \zeta, u(\zeta)))^2 dx d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} < 1, \end{aligned}$$

откуда сразу вытекает справедливость леммы.

Норма погрешности  $\| \varepsilon \|_{0, \omega_h}$  оценивается с помощью следующих двух теорем.

**Теорема 5.5.** Если выполнены условия теоремы 5.2 и леммы 5.1, то будут справедливы оценки

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^\alpha \left\{ \ln h \right\}^{\frac{\delta}{2} \cdot \alpha} \| \| N(x, \zeta) \|_{\alpha, \zeta, \Omega} \|_{0, x, \Omega} \{ \lambda^2 | F(x, \zeta, u(\zeta)) |_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 + \\ + | f |_{\frac{1}{2}, \Omega} \}^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad (5.13)$$

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^\alpha \| \| F_1(x, \zeta) \|_{\alpha, \zeta, \Omega} \|_{0, x, \Omega} \{ \lambda^2 | F(x, \zeta, u(\zeta)) |_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 + \\ + | f |_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad (5.14)$$

где

$$C = |\lambda| \frac{1}{1-q} C_1 \sqrt{2},$$

$$| F(x, \zeta, u(\zeta)) |_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(F(x, \zeta, u(\zeta)) - F(s, \zeta, u(\zeta)))^2}{|x-s|^{1+2\alpha}} dx d\zeta ds,$$

$C_1$  определяется формулой (3.17).

**Доказательство.** В неравенстве (5.10) оценим норму  $\| R \|_{0, \omega_h}$ :

$$\| R \|_{0, \omega_h}^2 = h \sum_{i=1}^n R_i^2 = h \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( F(x, \zeta, u(\zeta)) - \right. \right. \\ \left. \left. - F\left(x, \zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right) dx d\zeta \right)^2 \leq \\ \leq hn \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( F(x, \zeta, u(\zeta)) - \right. \right. \\ \left. \left. - F\left(x, \zeta, \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds\right) \right) dx d\zeta \right)^2.$$

В дальнейших преобразованиях используем для функции  $F(x, \zeta, u(\zeta))$  условие Липшица, тогда будем иметь

$$\| R \|_{0, \omega_h}^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} | N(x, \zeta) | \left| u(\zeta) - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(s) ds \right| dx d\zeta \right)^2 \leq \\ \leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} N^2(x, \zeta) dx d\zeta \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u(\zeta) - u(s))^2 d\zeta ds. \quad (5.15)$$

Пусть  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , тогда из неравенства (5.15) получим

$$\begin{aligned} \|R\|_{0,\omega_h}^2 &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} N^2(x, \zeta) dx d\zeta \times \\ &\times \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^2} |\zeta - s|^2 d\zeta ds \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|N(x, \zeta)\|_{0,\zeta,\Omega}^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^2} dx d\zeta. \end{aligned}$$

Используем неравенства (3.16) — (3.17), (см. § 3 данной главы), тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \|R\|_{0,\omega_h}^2 &\leq h^{2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|N(x, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 dx \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u(\zeta) - u(s))^2}{|\zeta - s|^2} dx d\zeta C_1^2 = \\ &= C_1^2 h^{2\alpha} \|N(x, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega} \|0,x,\Omega\| u|_{\frac{1}{2},\Omega}^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_1 h^\alpha \|N(x, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega} \|0,x,\Omega\| u|_{\frac{1}{2},\Omega}^2, \quad (5.16)$$

а если  $\alpha = 1/2$ , то

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_1 h^{\frac{1}{2}} |\ln h| \|N(x, \zeta)\|_{\frac{1}{2},\zeta,\Omega} \|0,x,\Omega\| u|_{\frac{1}{2},\Omega}^2. \quad (5.17)$$

Объединив оценки (5.16) и (5.17), получим

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_1 h^\alpha |\ln h|^{\frac{\delta}{2} \frac{1}{2},\alpha} \|N(x, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega} \|0,x,\Omega\| u|_{\frac{1}{2},\Omega} \quad (5.18)$$

Пусть далее  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ , тогда из (5.15) с учетом неравенств (3.16), (3.17) будем иметь

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_1 h^\alpha \|N(x, \zeta)\|_{\alpha,\zeta,\Omega} \|0,x,\Omega\| u|_{\alpha,\Omega}. \quad (5.19)$$

Исходя из уравнения (5.1), нетрудно получить оценку

$$|u|_{\alpha,\Omega} \leq \sqrt{2} \{\lambda^2 |F(x, \zeta, u(\zeta))|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 + |f|_{\alpha,\Omega}^2\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.20)$$

Используя (5.10), (5.12), (5.20), из неравенств (5.18) и (5.19) получим оценки (5.13) и (5.14). Теорема доказана.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 5.3, тогда гладкость решения интегрального уравнения повышается и  $u(x) \in \omega_2^{1+\alpha}(\Omega)$ .

$0 < \alpha < 1$ . Однако точность сеточной схемы (5.7) несмотря на это, остается прежней. Для повышения точности сеточную схему (5.7) нужно модифицировать. Для этого преобразуем уравнение (5.2) к виду

$$u(x_i) = \lambda \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x_i, \zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j)) d\zeta \right) + f(x_i) + \lambda R_i^{(1)}, \quad (5.21)$$

где

$$R_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (F(x_i, \zeta, u(\zeta)) - F(x_i, \zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j))) d\zeta \right).$$

Отбрасывание остаточного члена приводит к модифицированной сеточной схеме вида

$$v_i = \lambda \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x_i, \zeta, v_i + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}) d\zeta \right) + f(x_i). \quad (5.22)$$

Введем обозначение

$$e_i = u(x_i) - v_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (5.23)$$

из (5.21), (5.22) получаем

$$e_i = \lambda \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x_i, \zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j)) - F(x_i, \zeta, v_i + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}) d\zeta + \lambda R_i^{(1)}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (5.24)$$

Используя условия теоремы 5.3 и теорему Лагранжа для функций  $F(x_i, \zeta, u(\zeta))$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & F(x_i, \zeta, u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j)) - F(x_i, \zeta, v_i + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}) = \\ & = F'_u(x_i, \zeta, \eta_j(\zeta)) (u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j) - v_i - (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}), \end{aligned} \quad (5.25)$$

где

$$u(x_j) + (\zeta - x_j) u_{\bar{x}}(x_j) \leq \eta_j(\zeta) \leq v_i + (\zeta - x_j) v_{\bar{x},j}, \quad x_{i-1} \leq \zeta \leq x_i.$$

Подставим (5.25) в (5.24) и используем (5.23), в результате получим

$$e_i = \lambda \sum_{i=1}^n h \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F'_u(x_i, \zeta, \eta_j(\zeta)) \left( e_j + (\zeta - x_j) \frac{e_j - e_{j-1}}{h} \right) d\zeta \right) + \lambda R_i^{(1)}, \quad i = \overline{0, n},$$

или

$$\begin{aligned} e_i = \lambda \sum_{j=1}^n h \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(x_i, \zeta, \eta_j(\zeta)) \left(1 + \frac{\zeta - x_j}{h}\right) d\zeta e_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(x_i, \zeta, \eta_j(\zeta)) \frac{x_j - \zeta}{h} d\zeta e_{j-1} \right\} + \lambda R_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(x_i, \zeta, \eta_j(\zeta)) \left(1 + \frac{\zeta - x_j}{h}\right) d\zeta, \\ b_{i,j} &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'_u(x_i, \zeta, \eta_j(\zeta)) \frac{x_j - \zeta}{h} d\zeta, \quad j = \overline{1, n}; \quad i = \overline{0, n}, \end{aligned}$$

тогда после элементарных преобразований получаем

$$e_i = \lambda h \sum_{j=0}^n (a_{ij} + b_{ij+1}) e_j + \lambda R_i^{(1)}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (5.26)$$

где  $a_{i0} = b_{in+1} = 0$ .

Пусть

$$K_{ij} = a_{ij} + b_{ij+1}, \quad i, j = \overline{0, n},$$

тогда (5.26) принимает вид

$$e_i = \lambda h \sum_{j=0}^n K_{ij} e_j + \lambda R_i^{(1)}, \quad (5.27)$$

или в векторной форме

$$(E - A) e = \lambda R,$$

где

$$e = (e_0, e_1, \dots, e_n)^T, \quad R = (R_0^{(1)}, \dots, R_n^{(1)})^T, \quad A = \|\lambda R K_{ij}\|_n^0.$$

Если матрица  $E - A$  невырождена, то

$$\|e\|_{0, \omega_h} \leq \|\lambda\| \|(E - A)^{-1}\| \|R\|_{0, \omega_h}. \quad (5.28)$$

Докажем следующую лемму.

**Лемма 5.2.** Если  $2 \|\lambda\| \|M\| < 1$ , то матрица  $E - A$  невырождена, обратима и справедлива оценка (5.12), где

$$q = \|A\| < 1, \quad \mu^2 = \max_{i,j} \max_{\eta_j(\zeta) \in L_2(\Omega)} \left( \frac{1}{3h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (F'_u(x_i, \zeta, \eta_j(\zeta)))^2 d\zeta \right).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.6.** Если выполнены условия теоремы 5.4 и леммы 5.2, то будут справедливы оценки

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^{\alpha+1} |\ln h|^{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \alpha} \left\{ \sum_{i=0}^n h \| L(x_i, \zeta) \|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \{ \lambda^2 |F'_x(x, \zeta, u(\zeta))|_{\frac{1}{2}, \zeta, \Omega}^2 + |f'|_{\frac{1}{2}}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad (5.29)$$

$$\| \varepsilon \|_{0, \omega_h} \leq Ch^{\alpha+1} \left\{ \sum_{i=1}^n h \| L(x_i, \zeta) \|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \{ \lambda^2 |F'_x(x, \zeta, u(\zeta))|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 + |f'|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad (5.30)$$

где  $C = C_1 |\lambda| \frac{1}{1-q} \sqrt{2}$ ,

$$|F'_x(x, \zeta, u(\zeta))|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(F'_x(x, \zeta, u(\zeta)) - F'_s(s, \zeta, u(\zeta)))^2}{|x-s|^{1+2\alpha}} dx d\zeta ds.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.3.

## § 6. Сеточные схемы для двухмерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

Рассматривается интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta + f(x), \quad (6.1)$$

где  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ .

Докажем теоремы существования.

**Теорема 6.1.** Пусть  $f(x) \in W_2^{\alpha}(\Omega)$ , ядро  $K(x, \zeta)$  удовлетворяет неравенству

$$\| K(x, \zeta) \|_{\alpha, x, \Omega} = \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(x, \zeta) dx d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (6.2)$$

где

$$\rho = \sqrt{(x_1 - \zeta_1)^2 + (x_2 - \zeta_2)^2}, \quad |\lambda| < \Lambda^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(x, \zeta) dx d\zeta \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

тогда решение уравнения (6.1) — функция  $u(x)$  — существует единственно и принадлежит классу  $W_2^{\alpha}(\Omega)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .



**Доказательство.** На основании известных результатов работы [50] следует существование и единственность решения уравнения (6.1) в классе  $L_2(\Omega)$ . Покажем, что это решение обладает более высокой гладкостью. Рассмотрим интегральный оператор

$$Tu(x) = \int_{\Omega} K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{\alpha, \Omega} &= \left\{ \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \right. \\ &+ \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\left( \int_{\Omega} K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta - \int_{\Omega} K(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx d\zeta \left. \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \int_{\Omega} u^2(\zeta) d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(x, \zeta) dx d\zeta + \right. \\ &+ \left. \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|K(x, \zeta)\|_{\alpha, x, \Omega}, \|Tu\|_{\alpha, \Omega} \leq \|u\|_{0, \Omega}.$$

Отсюда с учетом условия (6.2) следует справедливость следующей теоремы.

**Теорема 6.2.** Пусть  $f(x) \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ ,  $|\lambda| < \Lambda^{-1/2}$ , ядро  $K(x, \zeta)$  удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|K\|_{1+\alpha, \Omega, \Omega} &= \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(x, \zeta) dx d\zeta + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx d\zeta + \right. \\ &+ \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(K(x, \zeta) - K(t, \zeta))^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx d\zeta dt + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left( \frac{K'_{x_1}(x, \zeta) - K'_{t_1}(t, \zeta))^2}{\rho^{2+2\alpha}} + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{(K'_{x_2}(x, \zeta) - K'_{t_2}(t, \zeta))^2}{\rho^{2+2\alpha}} \right) dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned} \quad (6.3)$$

тогда решение уравнения (6.1) — функция  $u(x) \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Доказательство.** Для оператора (6.2) имеем

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{1+\alpha, \Omega} &= \left\{ \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial x_1} u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \right. \\ &+ \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial x_2} u(\zeta) d\zeta \right)^2 dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Omega} \frac{\left( \int_{\Omega} K'_{x_1}(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta - \int_{\Omega} K'_{t_1}(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} dxdt + \\
& + \iint_{\Omega} \frac{\left( \int_{\Omega} K'_{x_1}(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta - \int_{\Omega} K'_{t_2}(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} dxdt + \\
& + \iint_{\Omega} \frac{\left( \int_{\Omega} K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta - \int_{\Omega} K(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} dxdt \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \|u\|_{0,\Omega} \|K(x, \zeta)\|_{1+\alpha, x, \Omega},
\end{aligned}$$

поэтому при условии (6.3) решение уравнения (6.1) — функция  $u(x) \in W_2^{1+\alpha}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Теорема доказана.

Перейдем к построению и исследованию точности сеточной схемы. Разобьем область  $\Omega$  на подобласти  $\Omega_{i,e}$ , где

$$\begin{aligned}
\Omega_{il} &= \{x_{l-1}^{(1)} \leq x_1 \leq x_l^{(1)}; x_{l-1}^{(2)} \leq x_2 \leq x_l^{(2)}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n}; \\
\Omega_{il} &= \Omega_i \times \Omega_l,
\end{aligned}$$

и преобразуем уравнение (6.1) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{il}} u(x) dx &= \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n h^2 A_{il}^{ik} \left( \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{jk}} u(\zeta) d\zeta \right) + \lambda R_{il} + \\
&+ \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{il}} f(x) dx, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_{il}^{ik} &= \frac{1}{h^4} \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} K(s, t) dsdt, \\
R_{il} &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \left( K(x, \zeta) - \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{jk}} K(x, s) ds \right) u(\zeta) dx d\zeta, \\
&i, l, j, k = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Из (6.4) приходим к сеточной системе

$$v_{il} = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n h^2 A_{il}^{ik} v_{jk} + \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{il}} f(x) dx. \tag{6.5}$$

Для погрешности

$$\varepsilon_{il} = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{il}} u(x) dx - v_{il}, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n},$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - A) \varepsilon = \lambda R, \tag{6.6}$$

где

$$A = \|\lambda h^2 a_{ij}\|_1^n, \quad a_{ij} = \|A_{ij}^{lk}\|_1^n,$$

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{in}), \quad R_i = (R_{i1}, \dots, R_{in}),$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad R = (R_1, \dots, R_n).$$

Если матрица  $E - A$  невырождена, то система (6.6) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq |\lambda| \|(E - A)^{-1}\| \|R\|_{0, \omega_h}. \quad (6.7)$$

Существует следующая лемма.

**Лемма 6.1.** Если

$$|\lambda| \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega} < 1, \quad (6.8)$$

то матрица  $E - A$  невырождена, обратима и справедлива оценка

$$\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}, \quad (6.9)$$

где  $q = \|A\| < 1$ .

**Доказательство.** Из эквивалентности сферической и спектральной норм и с помощью неравенства Коши — Буняковского и неравенства (6.8) имеем

$$q = N(A) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda h^2 \|a_{ij}\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^2 h^4 \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n (A_{ij}^{lk})^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left( \lambda^2 h^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{h^4} \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} K(s, t) ds dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq |\lambda| \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(s, t) ds dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|K(s, t)\|_{0, \Omega + \Omega} < 1.$$

Лемма доказана.

Норма погрешности  $\|\varepsilon\|_{0, \omega_h}$  оценивается с помощью следующих теорем.

**Теорема 6.3.** Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и  $\|K(x, \zeta)\|_{\beta, \zeta, \Omega} < \infty$ . Тогда будут справедливы следующие оценки:

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq Ch^{\alpha + \beta - 1} \|u\|_{\alpha, \Omega} \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, s))^2}{\rho^{2+2\beta}} dx d\zeta dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (6.10)$$

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta > 1,$$

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq Ch^{\beta - \frac{1}{2}} |\ln h|^{\delta \frac{1}{2} \cdot \alpha} \|u\|_{\alpha, \Omega} \times$$

$$\times \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, s))^2}{\rho^{2+2\beta}} dx d\zeta ds \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1.$$

(6.11)

Доказательство этой теоремы является модификацией теоремы 3.4 для двухмерной задачи, поэтому опускается.

*Замечание 6.1.* Согласно условиям теоремы 6.3 решение уравнения (6.1) принадлежит только пространству  $\omega_2^\alpha(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , хотя эти условия более сильные, чем условия теоремы 6.1. Поскольку на основании известных теорем вложения пространство  $\omega_2^\alpha(\Omega)$ , для  $0 < \alpha \leq 1$  не вкладывается в  $C(\bar{\Omega})$ , то рассмотрение погрешности  $\varepsilon$  в виде

$$\varepsilon_{il} = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{il}} u(x) dx - v_{il}, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n}$$

является существенным моментом в исследовании точности сеточной схемы (6.5).

**Теорема 6.4.** Пусть  $f(x) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $K(x, \zeta) \in W_2^1(\Omega, \Omega)$ ,  $|\lambda| < \Lambda^{-1/2}$ ,  $\|K'_\zeta(x, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega} < \infty$  и выполнено условие леммы 6.1, тогда будет справедлива оценка

$$\|\varepsilon\|_{0, \omega_h} \leq Ch^\alpha \{ \|u\|_{0, \Omega}^2 \|K'_\zeta(x, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 + \|K(x, \zeta)\|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 \|u\|_{1, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad (6.12)$$

где

$$C = |\lambda| \frac{1}{1-q} V^{2^{3+\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

**Доказательство.** Преобразуем остаточный член  $R_{il}$  к виду

$$R_{il} = R_{il}^{(1)} + R_{il}^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} R_{il}^{(1)} &= \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \left( K(x, \zeta) - \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{jk}} K(x, \zeta) \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{jk}} u(t) dt \right) dx d\zeta = \\ &= \frac{1}{h^6} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{jk}} u(t) dt \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (K(x, \zeta) - K(x, s)) dx d\zeta dt, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} R_{il}^{(2)} &= \frac{1}{h^4} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (K(x, \zeta) - K(x, s)) \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{jk}} (u(\zeta) - \\ &\quad - u(t)) dx d\zeta ds dt = \frac{1}{h^6} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{ik}} (K(x, \zeta) - K(x, s)) (u(\zeta) - \\ &\quad - u(t)) dx d\zeta ds dt. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Оценим норму

$$\|R\|_{0, \omega_h} \leq \left\{ 2h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (R_{il}^{(1)})^2 + 2h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (R_{il}^{(2)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.15)$$

Для оценки величины  $R_{il}^{(1)}$  исследуем очевидное равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (K(x, \zeta) - K(x, s)) dx d\zeta ds = \\ &= \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \left\{ \int_{s_1}^{\zeta_1} \left( \frac{\partial K(x, \theta, \zeta_2)}{\partial \theta} - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}^{(1)}}^{x_j^{(1)}} \frac{\partial K(x, s_1, s_2)}{\partial s_1} ds_1 \right) d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{s_2}^{\zeta_2} \left( \frac{\partial K(x, s_1, \eta)}{\partial \eta} - \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}^{(2)}}^{x_j^{(2)}} \frac{\partial K(x, \zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 \right) d\eta \right\} dx d\zeta ds. \quad (6.16) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тождество

$$\int_{x_{i-1}^1} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{s_1}^{\zeta_1} d\theta dx d\zeta ds_1 = \int_{x_{i-1}^2} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{s_2}^{\zeta_2} d\eta dx d\zeta ds_2 = 0.$$

Подставив соотношение (6.16) в (16.13), получим

$$\begin{aligned} R_{il}^{(1)} &= \frac{1}{h^6} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int u(t) dt \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \left\{ \frac{1}{h} \int_{s_1}^{\zeta_1} \int_{s_{j-1}^{(1)}}^{s_j^{(1)}} \left( \frac{\partial K(x, \theta, \zeta_2)}{\partial \theta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial K(x, s_1, s_2)}{\partial s_1} \right) ds_1 d\theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{h} \int_{s_2}^{\zeta_2} \int_{s_{j-1}^{(2)}}^{s_j^{(2)}} \left( \frac{\partial K(x, s_1, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x, \zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_2} \right) d\zeta_2 d\eta \right\} dx d\zeta ds. \end{aligned}$$

Далее будем иметь

$$\begin{aligned} & h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (R_{il}^{(1)})^2 = \\ &= 2 \frac{1}{h^4} h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \int u^2(t) dt \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \left\{ \frac{\partial K(x, \zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_1} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial K(x, s_1, s_2)}{\partial s_1} \right\}^2 + \left( \frac{\partial K(x, \zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial K(x, s_1, s_2)}{\partial s_2} \right)^2 \Big\} dx d\zeta ds \leq \\ & \leq 2 \frac{1}{h^4} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{jk}} u^2(t) dt \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \left\{ \frac{\left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s_1} \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} \rho^{2+2\alpha} + \right. \\
& \left. + \frac{\left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s_1} \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} \rho^{2+2\alpha} \right\} dx d\zeta ds \leq \\
& \leq 2 \frac{1}{h^3} h^{2+2\alpha} \sqrt{2^{2+2\alpha}} \int_{\Omega} u^2(t) dt \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s_1} \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} + \right. \\
& \left. + \frac{\left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s_2} \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} \right\} dx d\zeta ds.
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (R_{il}^{(1)})^2 \leq 2^{2+\alpha} h^{2\alpha-2} \|u\|_{0,\Omega}^2 |K'_{\zeta}(x, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}, \quad (6.17)$$

где

$$\begin{aligned}
|K'_{\zeta}(x, \zeta)|_{\alpha,\zeta,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s_1} \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} + \right. \\
& \left. + \frac{\left( \frac{\partial K(x, \zeta)}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s_2} \right)^2}{\rho^{2+2\alpha}} \right\} dx d\zeta ds.
\end{aligned}$$

Теперь оценим

$$\begin{aligned}
h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (R_{il}^{(2)})^2 &= h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{1}{h^6} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (K(x, \zeta) - \right. \\
& \left. - K(x, s))(u(\zeta) - u(t)) dx d\zeta ds dt \right\}^2 \leq \\
& \leq \frac{1}{h^{12}} h^6 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (K(x, \zeta) - K(x, s))^2 dx d\zeta ds \times \\
& \times \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (u(\zeta) - u(t))^2 d\zeta dt,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (R_{il}^{(2)})^2 &\leq \frac{1}{h^6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (K(x, \zeta) - K(x, s))^2 dx d\zeta ds \times \\
& \times \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (u(\zeta) - u(t))^2 d\zeta dt. \quad (6.18)
\end{aligned}$$

С учетом очевидного равенства

$$u(\zeta) - u(t) = \int_{t_1}^{\zeta_1} \frac{\partial u(\eta, \zeta_2)}{\partial \eta} d\eta + \int_{t_2}^{\zeta_2} \frac{\partial u(t_1, \theta)}{\partial \theta} d\theta$$

соотношение (6.18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (R_{il}^{(2)})^2 &\leq \frac{1}{h^6} 2h^4 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{il}} \int_{\Omega_{jk}} \int_{\Omega_{jk}} (K(x, \zeta) - K(x, s))^2 \times \\ &\times dx d\zeta ds \int_{\Omega_{jk}} \left( \left( \frac{\partial u(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_2} \right)^2 \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \leq \\ &\leq \sqrt{2}^{4+2\alpha} h^{2\alpha-2} |K(x, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 |u|_{1, \Omega}^2, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned} |K(x, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(K(x, \zeta) - K(x, s))^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx d\zeta ds, \\ |u|_{1, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \zeta_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \zeta_2} \right)^2 \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Используя оценки (6.17) и (6.19), неравенство (6.15) преобразуем к виду

$$R \|_{0, \omega_h} \leq \sqrt{2}^{3+\alpha} h^{\alpha} \{ \|u\|_{0, \Omega}^2 |K'_{\zeta}(x, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 + |K(x, \zeta)|_{\alpha, \zeta, \Omega}^2 |u|_{1, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.20)$$

Учитывая оценки (6.9) и (6.20), из (6.7) получаем оценку (6.12). Теорема доказана.

**Теорема 6.5.** Пусть выполнены условия теоремы 6.1, леммы 6.1 и  $|K(x, \zeta)|_{\beta, \zeta, \Omega} < \infty$ , тогда справедливы следующие оценки

$$\|e\|_{0, \omega_h} \leq ch^{\alpha+\beta-1} |K(x, \zeta)|_{\beta, \zeta, \Omega} \|u\|_{\alpha, \Omega}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \|e\|_{0, \omega_h} &\leq Ch^{\beta - \frac{1}{2}} |K(x, \zeta)|_{\beta, \zeta, \Omega} \{ |\ln h|^{\frac{2\delta}{2} - \alpha} \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 + \\ &+ h^{2\alpha-1} |u|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где  $C = 2C_2 |\lambda| \frac{1}{1-q}$ .

**Доказательство.** Аналогично тому, как это получено для предыдущей теоремы, имеем

$$\|R\|_{0, \omega_h} \leq 2C_2 h^{\alpha+\beta-1} |K(x, \zeta)|_{\beta, \zeta, \Omega} \|u\|_{\alpha, \Omega}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1, \quad (6.23)$$

$$\|R\|_{0,\omega_h} \leq C_2 h^{\beta - \frac{1}{2}} |K(x, \zeta)|_{\beta, \zeta, \Omega} \{ |\ln h|^{\frac{2\delta}{2}} \cdot \alpha \|u\|_{\alpha, \Omega}^2 + \\ + h^{2\alpha-1} |u|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1, \quad (6.24)$$

где

$$C_2 = \max \{ |C_1| 2^{1+\frac{\beta}{2}}, 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}+1,5} \}.$$

Учитывая оценки (6.9) и (6.24), из неравенства (6.7) получим (6.22). Теорема доказана.

Оценим нормы  $|u|_{\alpha, \Omega}$ ;  $|u'|_{\alpha, \Omega}$  через исходную информацию. Имеем

$$u^2(x) = \left( \lambda \int_{\Omega} K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta + f(x) \right)^2 \leq \\ \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_{\Omega} K^2(x, \zeta) d\zeta \int_{\Omega} u^2(\zeta) d\zeta + f^2(x) \right\},$$

откуда следует

$$\|u\|_{0, \Omega}^2 \leq 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2 \|u\|_{0, \Omega}^2 + 2\|f\|_{0, \Omega}^2,$$

или

$$\|u\|_{0, \Omega} \leq \sqrt{2} \|f\|_{0, \Omega} (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.25)$$

При этом в (6.25) предполагаем выполнимым условие

$$1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2 > 0. \quad (6.26)$$

Оценим  $|u|_{\alpha, \Omega}$ . С этой целью рассмотрим разность

$$u(x) - u(s) = \lambda \int_{\Omega} (K(x, \zeta) - K(s, \zeta)) u(\zeta) d\zeta + f(x) - f(s),$$

на основании которой после элементарных преобразований приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(s))^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx ds \leq 2 \left\{ \lambda^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(K(x, \zeta) - K(s, \zeta))^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx d\zeta ds \int_0^1 u^2(\zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(f(x) - f(s))^2}{\rho^{2+2\alpha}} dx ds \right\},$$

или

$$|u|_{\alpha, \Omega}^2 \leq 2 \{ \lambda^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2 \|u\|_{0, \Omega}^2 + |f|_{\alpha, \Omega}^2 \}. \quad (6.27)$$

Подставим (6.25) в неравенство (6.27), в результате получим

$$|u|_{\alpha, \Omega}^2 \leq 2 \{ \lambda^2 |K(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2 2\|f\|_{0, \Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} + |f|_{\alpha, \Omega}^2 \},$$

т. е.

$$|u|_{\alpha, \Omega} \leq \sqrt{2} \{ 2\lambda^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \zeta)\|_{0, \Omega \times \Omega}^2)^{-1} |K(x, \zeta)|_{\alpha, x, \Omega}^2 \|f\|_{0, \Omega}^2 + \\ + |f|_{\alpha, \Omega}^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.28)$$



Оценим теперь норму:

$$\|u\|_{\alpha,\Omega}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(\xi) - u(s))^2}{\rho^{2+2\alpha}} d\xi ds = \|u\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{\alpha,\Omega}^2. \quad (6.29)$$

Подставляя (6.25) и (6.27) в выражение (6.28) будем иметь

$$\begin{aligned} \|u\|_{\alpha,\Omega} \leq \sqrt{2} \{ (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \xi)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0,\Omega} (1 + 2\lambda^2 |K(x, \xi)|_{\alpha,x,\Omega}^2 + \\ + |f|_{\alpha,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} \}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Теперь оценим норму

$$\|u\|_{1+\alpha,\Omega}^2 = \|u\|_{\alpha,\Omega}^2 + \|u'_{x_1}\|_{\alpha,\Omega}^2 + \|u'_{x_2}\|_{\alpha,\Omega}^2. \quad (6.31)$$

С этой целью запишем соотношение для первых частных производных от решения уравнения (6.1):

$$u'_{x_i} = \lambda \int_{\Omega} K'_{x_i}(x, \xi) u(\xi) d\xi + f_{x_i}(x), \quad i = 1, 2,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \|u'_{x_i}\|_{0,\Omega}^2 \leq 4\lambda^2 \|K'_{x_i}\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \xi)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \\ + 2 \|f'_{x_i}\|_{0,\Omega}^2, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Из (6.32) сразу следует искомая оценка

$$\begin{aligned} |u|_{1,\Omega} \leq \left\{ \sum_{i=1}^2 [4\lambda^2 \|K'_{x_i}(x, \xi)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2 (1 - 2\lambda^2 \|K(x, \xi)\|_{0,\Omega \times \Omega}^2)^{-1} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \right. \\ \left. + 2 \|f'_{x_i}\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Если в теореме 6.3 дополнительно предположить выполнение условия (6.26), то, подставляя (6.30) в (6.10), (6.11), получаем оценки скорости сходимости сеточной схемы (6.5) только в терминах априорной информации. Аналогично, добавляя условие (6.26) в формулировку теоремы 6.4 и подставляя (6.25), (6.33) в правую часть (6.17), получаем оценку скорости сходимости сеточной схемы (6.5) только в терминах априорной информации.

В параграфах 3—6 данной главы, посвященных сеточному методу решения интегральных уравнений для обобщенных решений из соболевских классов, существенную роль играли усредняющие операторы Стеклова. Благодаря использованию этих операторов удалось построить такие сеточные аппроксимации интегральных уравнений, которые имеют скорость сходимости, согласованную с гладкостью решения исходного уравнения. Следует заметить, что если использовать другие усредняющие операторы, выбор которых диктуется свойствами входной информации, и в первую очередь ядра интегрального оператора (а для интегро-дифференциального уравнения — видом дифференциального оператора), то скорость сходимости сеточного решения может

быть увеличена. Аналогичная идея, основанная на методе Бубнова — Галеркина, применена в работе [77] для решения интегрального уравнения Пайерса.

Особенно плодотворной оказалась идея использования специальных усредняющих операторов (операторов точных разностных схем) для построения дискретных аппроксимаций основных задач математической физики (см., например, [72] и приведенную там литературу). Получающиеся при этом разностные схемы обладают скоростью сходимости, согласованной с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи. Изложенные в § 3.6 результаты получены при участии Г. С. Каркарашвили.

### **§ 7. Некоторые вопросы интерполирования нелинейных операторов в функциональных пространствах**

Рассмотрим нелинейную систему типа «черный ящик» с частично известной структурой, о поведении которой можно судить лишь по входным и выходным сигналам. Ранее были приведены традиционные подходы к решению задачи идентификации в широком смысле таких систем [154]. Однако рассмотренные в [154] аппроксимации не обладают таким важным свойством интерполяционных приближений, как совпадения приближающей оператор-функции с приближаемой, когда последняя имеет нелинейность многочленного типа. Отсюда — невозможность установить теоремы о сходимости и точности операторных приближений. Здесь изложим некоторые аспекты интерполирования нелинейных операторов в функциональных пространствах, приняв в качестве базисных входных воздействий постоянные.

Пусть идентифицируемым оператором является оператор Урысона

$$Ay = \int_0^t \varphi(t, z, y(z)) dz = u(t), \quad (7.1)$$

где  $y(t)$  — входной сигнал,  $y: [0, T] \rightarrow [a, b]$ ,  $u(t)$  — выходной. С математической точки зрения задача заключается в аппроксимации оператора  $A$  известным оператором  $\tilde{A}$ . Рассмотрим некоторые частные, но представляющие теоретический и практический интерес, виды оператора  $A$ . Построим соответствующие аппроксимирующие операторы  $\tilde{A}$ , численная реализация которых на ЭВМ не вызывает особых трудностей, и, кроме того, оценки точности аппроксимации, выражающиеся через выходные сигналы  $u(t)$  нелинейной системы (7.1).

Рассмотрим вначале наиболее простой случай оператора (7.1):

$$Ay = \int_0^t \varphi(t, y(z)) dz = u(t). \quad (7.2)$$

Пусть входным воздействиям  $y_i(t) = c_i = \text{const}$  будут соответствовать выходные сигналы  $u_i(t)$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Тогда получим следующее

$$\int_0^t \varphi(t, c_i) dz = u_i(t),$$

$$\varphi(t, c_i) = \frac{1}{t} u_i(t) \quad (7.3)$$

В предположении, что  $u_i(t+0)$  существует, проинтерполируем функцию  $\varphi(t, y)$  полиномом Лагранжа степени  $n$  по переменной  $y$ , взяв в качестве узлов интерполирования значения  $y_i = c_i$ , и оператор  $\tilde{A}$  с учетом (7.3) запишем в виде

$$\tilde{A}y = \int_0^t \sum_{i=0}^n \varphi(t, c_i) L_i(y(z)) dz = \sum_{i=0}^n u_i(t) \frac{1}{t} \int_0^t L_i(y(z)) dz, \quad (7.4)$$

где  $L_i(v)$  — фундаментальные многочлены Лагранжа,  $l_i(y_k) = \delta_{ik}$ ,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Оценим точности аппроксимации

$$\begin{aligned} \|A_y - \tilde{A}_y\| &= \left\| \int_0^t \varphi(t, y(z)) dz - \int_0^t \sum_{i=0}^n \varphi(t, c_i) L_i(y(z)) dz \right\| \leq \\ &\leq \int_0^t \left\| \varphi(t, y(z)) - \sum_{i=0}^n \varphi(t, c_i) L_i(y(z)) \right\| dz = \\ &= \int_0^t \|\varphi(t, y, c_0, c_1, \dots, c_n) \omega(y)\| dz \leq \\ &\leq \int_0^t \max_y \|\varphi(t, y, c_0, c_1, \dots, c_n) \omega(y)\| dz, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где  $\|f\| = \max_y |f(y)|$ ,  $\varphi(t, y, c_0, \dots, c_n)$  — разделенные разности  $(n+1)$ -го порядка от функции  $\varphi$  в точках

$$y, c_0, \dots, c_n, \omega_n(y) = (y - c_0)(y - c_1) \dots (y - c_n).$$

Принимая во внимание (7.3), правую часть неравенства (7.5) можно заменить оценкой

$$\begin{aligned} &\int_0^t \max_y \|\varphi(t, y, c_0, \dots, c_n) \omega_n(y)\| dz = \\ &= \int_0^t \max_y \left| \varphi(t, y) + \omega_n(y) \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(t, c_k)}{(c_k - y) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (c_k - c_i)} \right| dz \simeq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \simeq \int_0^t \max_{1 \leq j \leq N} \left| \varphi(t, \bar{c}_j) + \omega_n(\bar{c}_j) \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(t, c_k)}{(c_k - \bar{c}_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (c_k - c_i)} \right| dz = \\ & = T \max_{1 \leq j \leq N} \left| \bar{u}_j(t) + \omega_n(\bar{c}_j) \sum_{k=0}^n \frac{u_k(t)}{(c_k - \bar{c}_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (c_k - c_i)} \right|, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где  $\bar{c}_j \in [a, b]$ ,  $\bar{c}_j \neq C_k$ ,  $\bar{u}_j(t)$  — выходной сигнал, соответствующий входному воздействию  $y = c_j$ . Отметим, что оценка точности аппроксимации (7.6) выражается через известные выходные сигналы  $u_k(t)$ ,  $\bar{u}_j(t)$ ,  $k = 0, n$ ,  $j = 1, N$  и, кроме того, оценка (7.6) стремится к оценке (7.5) при  $\max |\bar{c}_{j+1} - \bar{c}_j| \rightarrow 0$ .

Пусть оператор Урысона имеет вид

$$Ay = \int_0^t \varphi(t - z, y(z)) dz = u(t). \quad (7.7)$$

Поскольку

$$\int_0^t \varphi(t - z, y(z)) dz = \int_0^t \varphi(z, y(t - z)) dz,$$

легко получить, что

$$\varphi(t, c_i) = u'_i(t), \quad i = \overline{0, n},$$

$$\tilde{A}y = \int_0^t \sum_{i=0}^n \varphi(t - z, c_i) L_i(y(z)) dz = \int_0^t \sum_{i=0}^n u'_i(t - z) L_i(y(z)) dz. \quad (7.8)$$

Повторяя выкладки, аналогичные предыдущим, получаем приближенное значение для оценки сверху  $\|Ay - \tilde{A}y\|$  в виде

$$\max_{1 \leq j \leq N} \int_0^t \left| \bar{u}'_j(t - z) + \omega_n(\bar{c}_j) \sum_{k=0}^n \frac{u'_k(t - z)}{(c_k - \bar{c}_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (c_k - c_i)} \right| dz, \quad (7.9)$$

и эта оценка стремится к оценке сверху для  $\|Ay - \tilde{A}y\|$  при  $\max |\bar{c}_{j+1} - \bar{c}_j| \rightarrow 0$ .

*Замечание 1.* Если вместо  $u(t)$  на выходе получаем  $\tilde{u}(t) = u(t) + \eta(t)$ , где  $\eta(t) \in L_2(0, T)$  — некоторый шум, то есть смысл в формулах (7.8), (7.9)  $u'_i(t)$  и  $\bar{u}'_i(t)$  заменить на произведение усредненных от выхода  $\tilde{u}(t)$  функций с некоторым ядром усреднения.

Рассмотрим оператор Урысона вида

$$Ay = \int_0^t \varphi(t) K(z, y(z)) dz = u(t), \quad (7.10)$$

тогда будем иметь

$$K(t, c_i) = \left[ \frac{u_i(t)}{\varphi(t)} \right]',$$

$$\tilde{A}y = \int_0^t \varphi(t) \sum_{i=0}^n K(z, c_i) L_i(y(z)) dz = \int_0^t \varphi(t) \sum_{i=0}^n \left[ \frac{u_i(z)}{\varphi(z)} \right]' L_i(y(z)) dz. \quad (7.11)$$

В формуле (7.11) неизвестной функцией остается  $\varphi(t)$ . Получим для нее оценку  $\tilde{\varphi}(t)$  следующим образом. Обозначим выходной сигнал через  $v(t)$  при входном, равном  $y(t) = t$ . Тогда функцию  $\tilde{\varphi}(t)$  найдем из дифференциального уравнения

$$\int_0^t \tilde{\varphi}(t) \sum_{i=0}^n \left[ \frac{u_i(z)}{\tilde{\varphi}(z)} \right]' L_i(z) dz = v(t). \quad (7.12)$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (7.12) можно записать в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(0) \Phi(t), \quad (7.13)$$

$$\Phi(t) = \exp \left( \int_0^t \frac{v'(s) - \sum_i u_i'(s) L_i(s)}{v(s) - \sum_i u_i(s) L_i(s)} ds \right). \quad (7.14)$$

С учетом (7.13), (7.14) получим следующее выражение для аппроксимирующего оператора

$$\tilde{A}y = \int_0^t \Phi(t) \sum_{i=0}^n \frac{d}{dz} \left[ \frac{u_i(z)}{\Phi(z)} \right] L_i(y(z)) dz, \quad (7.15)$$

где все функции, входящие в правую часть (7.15), известны.

*Замечание 2.* Вместо обычной многочленной интерполяции можно рассмотреть сплайновую, при этом равномерная сходимость будет наблюдаться при более слабых ограничениях на интерполируемую функцию. Кроме того, подобный подход можно распространить и на многомерную задачу. Излагаемые в данном параграфе результаты получены при участии В. В. Хлобыстова.

### **ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

В этой главе рассматриваются вопросы, связанные с математической декомпозицией задач. Как известно, одним из приемов исследования сложных систем являются декомпозиция и агрегирование. Декомпозиция состоит в разложении исходной задачи на ряд независимых подзадач, а агрегирование — в замене какой-либо группы переменных, характеризующих состояние системы, одной переменной, именуемой агрегатом. Причем здесь можно идти двумя путями: а) выделять классы задач и развивать строгие процедуры декомпозиции и агрегирования с выполнением требования полной эквивалентности исходной и преобразованных задач; б) развивать математически строгие процедуры декомпозиции и агрегирования на основе отказа от полной эквивалентности.

В данной главе рассматривается первый подход. Отметим, что поскольку математическое описание всегда является приближенным модельным описанием, а в процессе исследования, как правило, приходится упрощать отдельные модели или иногда даже заменять их конечными связями, сформулированные выше задачи являются чрезвычайно актуальными [10, 12, 16, 17, 20, 22, 66, 67, 81, 83, 84, 89, 107, 108].

В данной главе предлагается декомпозиция для широкого класса блочных систем оптимизации. Метод разложения на основе агрегирования переменных развивается в применении к динамическим оптимизационным задачам в условиях неопределенностей.

Рассматриваются вопросы разложения управляемых динамических процессов со случайными возмущениями. Предлагаемый в данной главе метод впервые предложен в работах В. И. Цуркова [116] — [121] и развит В. И. Цурковым и Ю. А. Беловым для широкого класса задач оптимизации [5—9, 116—121].

#### **§ 1. Разложение двухэтапных задач стохастического программирования блочного типа**

Предлагается декомпозиция для двухэтапных задач стохастического программирования, соответствующих широкому классу блочных систем оптимизации.

Рассматривается задача линейного программирования с блочно-диагональной структурой части ограничений

$$A_j x_j = b_j, \quad x_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^J A_j^{(0)} x_j = b_j^{(0)}, \quad \sum_{j=1}^J c_j x_j \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

где все  $x_j$   $j \in [1 : J]$  суть  $l$ -мерные векторы, а матрицы  $A_j$ ,  $A_j^{(0)}$  и векторы  $c_j$ ,  $b_j$ ,  $b_j^{(0)}$  имеют согласованные размерности.

Предполагается, что элементы матриц  $A_j = A_j(\omega)$  и векторов  $b_j = b_j(\omega)$ ,  $c_j = c_j(\omega)$ ,  $j \in [1 : J]$  являются случайными величинами. Здесь параметр  $\omega$  принадлежит пространству случайных событий  $\Omega$  [49].

Рассматривается двухэтапная задача стохастического программирования

$$\sum_{j=1}^J A_j^{(0)} x_j = b_j^{(0)}, \quad x_j \geq 0, \quad (1.2)$$

$$\min_x M_\omega \left\{ \sum_{j=1}^J c_j(\omega) x_j + \min_{y_j} [q_j(\omega) y_j \mid B_j(\omega) y_j = b_j(\omega) - A_j(\omega) x_j, y_j \geq 0] \right\},$$

где при каждом  $j \in [1 : J]$  вводятся матрицы компенсации  $B_j(\omega)$ , векторы невязок  $J_j$  и штрафов  $q_j(\omega)$ , а через  $M_\omega$  обозначается математическое ожидание.

Пусть  $K_0$  — множество, задаваемое индуцированными ограничениями, т. е. первыми соотношениями в (1.2), а множества  $K_j$ ,  $j \in [1 : J]$  определяются в виде

$$K_j = \{x_j \mid \forall (\omega \in \Omega) \exists y_j \geq 0 \ B_j(\omega) y_j = b_j(\omega) - A_j(\omega) x_j\}.$$

Тогда детерминированная эквивалентная задача имеет вид

$$\min_{x \in K} \sum_{j=1}^J [M_\omega(c_j(\omega)) x_j + M_\omega \lambda_j^*(A_j, b_j, x_j) (b_j(\omega) - A_j(\omega) x_j)], \quad (1.3)$$

где векторы  $\lambda_j^*$   $j \in [1 : J]$  являются оптимальными двойственными переменными задачи второго этапа, которая распадается на  $J$  независимых задач и  $K = \left( \bigcap_{j=1}^J K_j \right) \cap K_0$ .

Можно убедиться в том, что задача (1.3) принадлежит к выпуклому блочно-сепарабельному программированию и для нее применим метод декомпозиции на основе введения макропеременных [119].

Рассматривается нелинейный аналог блочно-сепарабельной двухэтапной задачи стохастического программирования [125]

$$\sum_{j=1}^J g_j^{(0)}(x_j) \leq b^{(0)}, \quad x_j \geq 0, \quad (1.4)$$

$$\min_x M_\omega \left\{ \sum_{j=1}^J \varphi_j(\omega, x_j) + \min_{y_j} [\psi_j(\omega, y_j) \mid h_j(\omega, y_j) \leq b_j(\omega) - g_j(\omega, x_j), y_j \geq 0] \right\}.$$

Если случайны только компоненты векторов  $b_{ij} \in [1 : J]$ , а функции  $\varphi_j(x_j)$ ,  $\psi_j(y_j)$ ,  $g_j(x_j)$ ,  $g_j^{(0)}(x_j)$ ,  $h_j(y_j)$  являются выпуклыми, т. е. устанавливается, что эквивалентная детерминированная задача принадлежит к выпуклому блочно-сепарабельному программированию то для нее применяется разрабатываемая здесь декомпозиция на основе введения макропеременных.

Рассматривается двухэтапная задача стохастического оптимального управления

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_j(t, u, \omega)}{dt} &= A_j(t, \omega) x_j(t, u_j, \omega) + B_j(t, \omega) u_j(t) + l_j(t, \omega) \\ u_j(t) &\geq 0, Q_j(t, \omega) x_j(t, u_j, \omega) + S_j(t, \omega) u_j(t) \leq W_j(t, \omega) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t &\in [T_1, T_2], \\ j &\in [1 : J], \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^J R_j(t) x_j(t, u_j) + D_j(t) u_j(t) \leq v(t), \quad (1.5)$$

$$\Lambda(u) = M_\omega \sum_{j=1}^J \left\{ \int_{T_1}^{T_2} \varphi_j(x_j(t, u_j, \omega), u_j(t, t, \omega)) dt + \varphi_j(x_j(T_2, u_j, \omega)) + \right. \\ \left. + \Phi_j(x_j(T_2, u_j, \omega), \omega) \right\} \rightarrow \min,$$

где  $\Phi_j(x_j, \omega)$   $j \in [1 : J]$  для произвольных  $x_j, \omega \in \Omega$  — суть нижние грани функционалов линейных задач оптимального управления (задач второго этапа), которые заключаются в минимизации функционалов

$$\Pi_j(y_j, z_j, x_j, \omega) = \int_{T_1}^{T_2} \{ \alpha_j(t, \omega) y_j(t) + \beta_j(t, \omega) z_j(t) + \gamma_j(t, x_j, \omega) \} dt + \\ + \delta_j(\omega) y_j(T_3) \quad (1.6)$$

при условиях

$$\frac{dy_j}{dt} = P_j(t, \omega) y_j(t) + E_j(t, \omega) Z_j(t) + F_j(t, x_j, \omega), \\ y_j(T_2) = y_{j1}(x_j, \omega), G_j(\omega) y_j(T_3) = H_j(x_j, \omega).$$

Учитывая, что согласно [23] разностная аппроксимация двухэтапной задачи (4.5) — (4.6) при условии выпуклости по  $x_j$  функций  $\varphi_j(x_j, \omega)$ ,  $F_j(x_j, \omega)$ ,  $-H_j(x_j, \omega)$ ,  $-G_{j1}(x_j, \omega)$  сводится к блочно-сепарабельной выпуклой задаче, устанавливается применимость разложения на основе агрегирования управлений.

Метод декомпозиции представляет собой итеративный процесс, на каждом шаге которого решается координирующая задача с агрегированными переменными (например, в случае задачи (1.5) — (1.6) макроуправлениями  $U^t = \sum_{j=1}^J u_j^t$ ) и локальные независимые задачи

для подсистем. Функционалы локальных задач формируются по двойственным переменным координирующей задачи, относящимся к свя-



зывающим ограничениям. Выводится критерий оптимальности промежуточного дезагрегированного решения (управления) и устанавливается монотонность по функционалу итеративного метода. Следствием последнего факта является то обстоятельство, что из алгоритма получаем минимизирующую для исходной задачи последовательность допустимых решений (управлений). Конкретная задача с подробным изложением предлагаемого подхода представлена ниже.

Рассматривается двухуровневая задача стохастического программирования

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T_j} T_j^{ik} &\leq \Phi_j^k, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad k \in K_j, \\ x_j^i &= 0, \quad i \in I \setminus I_j, \quad x_j^i \geq 0, \quad i \in I_j, \\ a^i \Theta - \sum_{j=1}^J x_j^i &= V^i, \quad i = 1, 2, \dots, I, \\ \Theta &\rightarrow \max. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь первые два условия — блочные ограничения. Последние равенства являются связывающим ограничением. Управление системой сводится к максимизации  $\Theta$ .

Предполагается, что коэффициенты матриц  $T_j^{ik}$  и компоненты векторов  $\Phi_j^k$  — случайные величины:

$$T_j^{ik} = T_j^{ik}(\omega), \quad \Phi_j^k = \Phi_j^k(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

где  $\Omega$  — пространство случайных событий.

Учет указанной неопределенности в задании параметров приводит к изменению в постановке оптимизационной задачи. Дальнейшие построения близки к тем, которые приводят к двухэтапной задаче стохастического программирования [125], однако отличаются от них.

Выбирается предварительное решение  $(\tilde{x}_j^i, i \in I_j, j = 1, 2, \dots, J)$ , удовлетворяющее условиям-равенствам исходной задачи. Фиксируется реализация случайного события  $\tilde{\omega}$  и соответствующие ему значения  $T_j^{ik}(\tilde{\omega})$ ,  $\Phi_j^k(\tilde{\omega})$ , после чего вычисляются невязки:

$$y_j^k(\tilde{\omega}) = \Phi_j^k - \sum_{i \in I_j} T_j^{ik}(\tilde{\omega}) \tilde{x}_j^i.$$

Вводится обозначение  $[y]^- = \max(0, -y)$ .

Пусть

$$M_\omega [y_j^k(\omega)]^- \leq \Delta \Phi_j^k, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad k \in K_j,$$

где символ  $M_\omega$  означает математическое ожидание. Далее предполагается, что существует дискретное распределение матриц  $T_j^{ik}$  и вектора  $\Phi_j^k$  с вероятностями  $p^{(1)}, \dots, p^{(N)}$ . Тогда эквивалентная детерминированная задача имеет вид

$$\sum_{i \in I_j} T_j^{ik(l)} x_j^i + y_j^{k(l)} = \Phi_j^k, \quad j \in J, \quad k \in K_j, \quad l \in N_j^k, \quad (1.8)$$

$$x_j^i \geq 0, \quad i \in I_j, \quad x_j^i = 0, \quad i \in I \setminus I_j, \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^{N_j} p_i [y_i^{-k(l)}]^- \leq \Delta \Phi_j^k, \quad j \in J, \quad k \in K_j, \quad (1.10)$$

$$a^i \Theta - \sum_{j=1}^J x_j^i = V^i, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (1.11)$$

$$\Theta \geq 0, \quad (1.12)$$

$$f = \Theta \rightarrow \max. \quad (1.13)$$

Как известно, задача (1.8) — (1.12) принадлежит ко второй канонической форме задач кусочно-линейного программирования. Соответствующая ей задача линейного программирования может быть получена заменой соотношений (1.8) и (1.10) следующими:

$$\sum_{i \in I_j} T_j^{ik(l)} x_j^i + y_j^{k(l)} - y_j^{-k(l)} = \Phi_j^k, \quad j \in J, \quad k \in K_j, \quad l \in N_j^k, \quad (1.14)$$

$$y_j^{k(l)} \geq 0, \quad y_j^{-k(l)} \geq 0, \quad (1.15)$$

$$\sum_{i=1}^{N_j^k} p_i y_j^{-k(l)} \leq \Delta \Phi_j^k, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad k \in K_j. \quad (1.16)$$

Задача (1.8) — (1.12) может быть решена методом, предложенным в [37], который заключается в следующем.

Введем агрегированные переменные  $X^i = \sum_{j=1}^J x_j^i$  и веса агрегирования  $\alpha_j^i = x_j^i / X^i$ . Зафиксировав  $\alpha_j^i$  и подставив  $x_j^i = \alpha_j^i X^i$  в (1.8) — (1.12), получим задачу агрегированных переменных. Двойственные оценки  $\lambda^i$ , соответствующие (1.11) для задачи в агрегированных переменных, формируют функционалы блочных задач, которые для фиксированного  $j \in J$  имеют вид

$$\sum_{i \in I_j} T_j^{ik(l)} x_j^i + y_j^{k(l)} = \Phi_j^k, \quad k \in K_j, \quad l \in N_j^k,$$

$$x_j^i \geq 0, \quad i \in I_j, \quad x_j^i = 0, \quad i \in I \setminus I_j,$$

$$\sum_{i=1}^{N_j^k} p_i [y_j^{k(l)}]^- \leq \Delta \Phi_j^k, \quad j \in J, \quad k \in K_j; \quad h_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_j^i x_j^i \rightarrow \max.$$

Пусть  $\bar{X}^i$ ,  $\bar{\Theta}$ ,  $\bar{y}_j^{k(l)}$  — оптимальные решения задачи в агрегированных переменных, тогда соответствующее решение  $\alpha_j^i \bar{X}^i$ ,  $\bar{\Theta}$ ,  $\bar{y}_j^{k(l)}$  является допустимым к исходной задаче. Если  $\hat{x}_j^i$ ,  $\hat{y}_j^{k(l)}$  — набор решений блочных задач, то веса агрегирования можно взять в виде

$$\alpha_j^i(\rho_j) = \begin{cases} [x_j^i + \rho_j(\hat{x}_j^i - \bar{x}_j^i)] \left[ \sum_{j=1}^J \bar{x}_j^i + \sum_{j=1}^J \rho_j(\hat{x}_j^i - \bar{x}_j^i) \right]^{-1}, & i \in I_j, \\ 0, & i \in I \setminus I_j, \end{cases} \quad (1.17)$$

где  $0 \leq \rho_j \leq 1$ .

Подставив  $\alpha_j^i(\rho_j)$  согласно (1.12) в исходную задачу, получим

задачу в агрегированных переменных с коэффициентами, зависящими от параметров  $\rho_j, j \in J$ . Пусть  $\overset{0}{g}(\rho_j)$  (оптимальное значение функционала этой задачи) есть функция от  $\rho_j, j \in J$ . Поставим задачу о нахождении максимума этой функции на единичном кубе. Пусть этот максимум достигается при некотором  $\overset{0}{\rho}_j, j \in J$ , тогда веса и для следующего шага итеративного процесса получаются подстановкой  $\overset{0}{\rho}_j$  в (1.17).

Следует отметить, что основным результатом является установление того факта, что функционалы для промежуточных допустимых решений строго возрастают. Указанное свойство в исходной работе [37] формулировалось как гипотеза, а в работе [106] соответствующее утверждение было доказано в рамках близкой стохастической модели. Используем метод доказательства, предложенного в [116].

Прежде чем сформулировать основную теорему, рассмотрим задачу в агрегированных переменных и найдем ее решение. Эта задача имеет вид

$$\sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} X^i + y_j^{k(l)} = \Phi_j^k, \quad j \in J, \quad k \in K_j, \quad l \in N_j^k, \quad (1.18)$$

$$\sum_{i=1}^{N_j^k} \rho^{(l)} [y_j^{k(l)}]^- \leq \Delta \Phi_j^k, \quad j \in J, \quad k \in K_j, \quad (1.19)$$

$$a^i \Theta - X^i = V^i, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (1.20)$$

$$\Theta \geq 0, \quad X^i \geq 0, \quad (1.21)$$

$$g = \Theta \rightarrow \max. \quad (1.22)$$

Выразив  $X^i$  через  $\Theta$  согласно (1.20) и подставив в (1.18), имеем

$$y_j^{k(l)} = \left( \Phi_j^k + \sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} V^i \right) - \left( \sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} a^i \right) \Theta. \quad (1.23)$$

Далее, величины  $y_j^{k(l)}$  из (1.23) подставим в (1.19), в результате получим

$$\sum_{i=1}^{N_j^k} \rho^{(l)} \left[ \left( \Phi_j^k + \sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} V^i \right) - \left( \sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} a^i \right) \Theta \right]^- \leq \Delta \Phi_j^k, \quad j \in J; \quad k \in K_j. \quad (1.24)$$

Левые части (1.24) при каждой фиксированной паре индексов представляют собой монотонно возрастающие кусочно-линейные функции с точками излома

$$\hat{\Theta}_j^{k(l)} = \left( \Phi_j^k + \sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} V^i \right) \left( \sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} a^i \right)^{-1}.$$

Заметим, что указанные функции равняются нулю в некоторой окрестности точки  $\Theta = 0$  и имеют пересечение с горизонтальными прямыми  $\Theta = \Delta \Phi_j^k$ .

Сделаем некоторые предположения, касающиеся точки пересечения указанных ломаных с прямыми  $\Delta = \Delta \Phi_j^k$ .

Предположим, что для каждой фиксированной пары  $(j, k)$  в точках пересечения  $\overset{0}{\Theta}_j^{k(l)}$  никакие  $y_j^{k(l)}$  не равняются нулю. Тогда введем наборы индексов  $L_j^{k+}$  и  $L_j^{k-}$ , для которых в точках пересечения значение  $y_j^{k(l)}$  соответственно строго больше и строго меньше нуля. Справедлива формула

$$\overset{0}{\Theta}_j^k = \left[ \Delta \Phi_j^k + \sum_{l \in L_j^{k-}} p^{(l)} \left( \Phi_j^k + \sum_{i=1}^I D_j^{ik(l)} V^i \right) \right] \left[ \sum_{l \in L_j^{k-}} \sum_{i=1}^I p^{(l)} D_j^{ik(l)} a^i \right]^{-1}. \quad (1.25)$$

Для задачи (1.13) — (1.22) оптимальное значение

$$\overset{0}{\Theta} = \min_{(j,k)} \overset{0}{\Theta}_j^k. \quad (1.26)$$

Предположим также, что минимум в (1.26) достигается на единственной паре чисел, которую обозначим  $(m, n)$ . Отметим, что сформулированные выше предположения о решении задачи (1.18) — (1.22) являются условиями невырожденности. Нетрудно убедиться, что для оптимального решения задачи (1.18) — (1.22) справедлива формула

$$\overset{0}{\Theta} = \left[ \Delta \Phi_m^n + \sum_{l \in L_m^{n-}} \left( \Phi_m^n + \sum_{i=1}^I D_m^{in(l)} V^i \right) \right] \times \left[ \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i=1}^I p^{(l)} q_m^{in(l)} a^i \right]^{-1}. \quad (1.27)$$

При этом оптимальные значения  $\overset{0}{X}^i$  могут быть получены подстановкой (1.27) в (1.20), а оптимальные невязки  $\overset{0}{y}_j^{k(l)}$  — из (1.23).

Для задачи (1.18) — (1.22) рассмотрим двойственную задачу. Пусть  $\eta_j^{k(l)}$  — двойственные переменные, соответствующие (1.18), а  $\xi_j^k$  — соответствующие (1.19). Тогда имеем

$$\sum_{i \in J} \sum_{k \in K_j} \sum_{l=1}^{N_j^{k(l)}} D_j^{ik(l)} \eta_j^{k(l)} - \lambda^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (1.28)$$

$$\sum_{i=1}^I a^i \lambda^i = 1, \quad (1.29)$$

$$\eta_j^{k(l)} \geq 0, \quad -\eta_j^{k(l)} + p^{(l)} \xi_j^k \geq 0, \quad (1.30)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{k \in K_j} \sum_{l=1}^{N_j^{k(l)}} \Phi_j^k \eta_j^{k(l)} + \sum_{i=1}^J \sum_{k \in K_j} \Delta \Phi_j^k \xi_j^k + \sum_{i=1}^I V^i \lambda^i \rightarrow \min. \quad (1.31)$$

Решение двойственной задачи (1.28) — (1.31) в сделанных предположениях о невырожденности имеет вид

$$\begin{aligned} \overset{0}{\xi}_j^{k(l)} &= 0, \quad (j, k) \in K \setminus (m, n), \\ \overset{0}{\eta}_j^{k(l)} &= 0, \quad (j, k) \in K \setminus (m, n), \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}\eta_m^{n(l)} &= 0, \quad l \in L_m^{n+}, \quad \eta_m^{n(l)} = p^{(l)} \xi_m^n, \quad l \in L_m^{n-}, \\ \lambda_i^0 &= \sum_{l \in L_m^{n-}} D_m^{in} p^{(l)} \xi_m^n.\end{aligned}$$

Для того чтобы определить неизвестную величину  $\xi_m^{0(n)}$ , необходимо последнее соотношение в (1.32) подставить в (1.29). В результате будем иметь

$$\sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i=1}^I p^{(l)} D_m^{in} a^i \xi_m^n = 1.$$

Таким образом,  $\xi_m^n = \left( \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i=1}^I p^{(l)} D_m^{in} a^i \right)^{-1}$ ,

$$\lambda_i^0 = \sum_{l \in L_m^{n-}} D_m^{in} p^{(l)} \left( \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i=1}^I p^{(l)} D_m^{in} a^i \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (1.33)$$

**Теорема.** Пусть при некоторых фиксированных весах  $\alpha_j^i$  получено оптимальное решение  $\bar{X}^i$  задачи (1.18) — (1.22), а соответствующее деагрегированное решение  $\bar{x}_j^i = \alpha_j^i \bar{X}^i$  вместе с  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{y}_j^{k(l)}$  не является оптимальным для исходной задачи (1.8) — (1.13). Тогда существует допустимое к (1.8) — (1.13) решение со строго большим значением функционала.

**Доказательство.** Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\hat{h}_j &= \sum_{i \in I_j} \lambda_i^0 x_j^i, \quad \hat{h} = \sum_{j=1}^J \hat{h}_j, \\ \bar{h}_j &= \sum_{i \in I_j} \bar{\lambda}_i^0 \bar{x}_j^i, \quad \bar{h} = \sum_{j=1}^J \bar{h}_j.\end{aligned}$$

Справедливо следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Достаточным условием оптимальности решения в исходной задаче (1.8) — (1.13) является выполнение равенства

$$\hat{h} = \bar{h}. \quad (1.34)$$

Если указанное решение не является оптимальным для исходной задачи, то соотношение (1.34) имеет вид строгого неравенства.

**Доказательство.** Его нетрудно провести по схеме, аналогичной схеме из работы [37] для соответствующего утверждения. Возвращаясь к доказательству теоремы, будем считать, что  $\rho_j = \rho$ ,  $j \in J$ , и разложим выражение (1.17) в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки  $\rho = 0$ :

$$\alpha_j^i(\rho) = \alpha_j^i + \rho (\hat{x}_j^i - \bar{x}_j^i) / \bar{X}^i - \alpha_j^i \rho \sum_{s=1}^J \rho (\hat{x}_s^i - \bar{X}_s^i) / \bar{X}^i + o(\rho). \quad (1.35)$$

Рассмотрим функцию  $\overset{0}{\Theta}$ , зависящую от  $\rho$  согласно формуле (1.27) в некоторой окрестности точки  $\rho = 0$ . Принимая во внимание условие невырожденности, следует заметить, что указанная формула справедлива также и в некоторой окрестности точки  $\rho = 0$ . Не ограничивая общности рассуждений, дальнейшие выкладки для простоты изложения проведем в предположении  $V^i = 0$ ,  $i \in I$ . Подставляя в правую часть (1.27) соотношение (1.35), имеем

$$\overset{0}{\Theta}(\rho) = \left( \Delta \Phi_m^n + \sum_{l \in L_m^{n-}} \Phi_m^n \right) \times \left\{ \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i \in I_l} p^{(l)} a^i T_m^{in(l)} \left[ \alpha_m^i + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho (\hat{x}_m^i - \overset{0}{x}_m^i) / \overset{0}{X}^i - \alpha_i^i \rho \sum_{s=1}^J (\hat{x}_s^i - \overset{0}{x}_s^i) / \overset{0}{X}^i \right] + o(\rho) \right\}^{-1}.$$

Введя обозначение

$$T = \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i \in I_l} p^{(l)} a^i T_m^{in(l)} \alpha_m^i$$

и разложив знаменатель последнего соотношения в ряд Тейлора, получим

$$\overset{0}{\Theta}(\rho) = \left( \Delta \Phi_m^n + \sum_{l \in L_m^{n-}} \Phi_m^n \right) T^{-1} \left[ 1 - \rho \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i \in I_l} p^{(l)} a^i T_m^{in(l)} (\hat{x}_m^i - \overset{0}{x}_m^i) (\overset{0}{X}^i T)^{-1} + \right. \\ \left. + \rho \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i=1}^J D_m^{in(l)} p^{(l)} a^i \sum_{s=1}^J (\hat{x}_s^i - \overset{0}{x}_s^i) (\overset{0}{X}^i T)^{-1} \right] + o(\rho).$$

Учитывая, что

$$\left( \Delta \Phi_m^n + \sum_{l \in L_m^{n-}} \Phi_m^n \right) T^{-1} = \overset{0}{\Theta}, \quad \overset{0}{\Theta} a^i (\overset{0}{X}^{-1}) = 1,$$

согласно (1.20) перепишем последнее соотношение в виде

$$\overset{0}{\Theta}(\rho) = \overset{0}{\Theta} - \rho \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i \in I_l} p^{(l)} T_m^{in(l)} (\hat{x}_m^i - \overset{0}{x}_m^i) T^{-1} + \\ + \rho \sum_{l \in L_m^{n-}} \sum_{i=1}^J D_m^{in(l)} p^{(l)} \sum_{s=1}^J (\hat{x}_s^i - \overset{0}{x}_s^i) T^{-1} + o(\rho). \quad (1.36)$$

Третье слагаемое (1.36) с учетом формул (1.33) для  $\overset{0}{\Theta}(\rho)$  примет вид

$$\rho \sum_{i=1}^J \sum_{i \in I_l} \lambda^i (\hat{x}_j^i - \overset{0}{x}_j^i) = (\hat{h} - \overset{0}{h}).$$

Второе слагаемое с учетом (1.14) и (1.13) можно преобразовать к виду

$$- \rho \sum_{l \in L_m^{n-}} p^{(l)} [(\hat{y}_m^{-n(l)} - \hat{y}_m^{+n(l)}) - (\overset{0}{y}_m^{-n(l)} - \overset{0}{y}_m^{+n(l)})] T^{-1}.$$

Разбивая последнее выражение на четыре суммы, видим, что последняя равна нулю по определению множества индексов  $L_m^{n-}$ . Третья сумма дает величину  $\rho \Delta \Phi_m^n T^{-1}$ . Первая сумма согласно (1.19) меньше или равна  $\rho \Delta \Phi_m^n T^{-1}$ .

Таким образом, имеем

$$\overset{0}{\Theta}(\rho) = \overset{0}{\Theta} + \rho(\hat{h} - h) + \rho \sum_{i \in L_m^{n-}} p^{(i)} \hat{y}_m^{+n(i)} T^{-1} + \rho F_m^n T^{-1} + o(\rho),$$

где  $\hat{h} - h > 0$ ,  $F_m^n \geq 0$ . Окончательно имеем неравенство  $\overset{0}{\Theta}(\rho) > 0$ , что и доказывает теорему.

В заключение заметим, что из доказанной теоремы в качестве следствия можно вывести сходимость опорных решений  $\overset{0}{x}_i^l$ ,  $\overset{0}{\Theta}$ ,  $\overset{0}{y}_i^{kl}$  к оптимальному решению исходной задачи.

Предыдущие построения относятся к двухэтапным задачам стохастического программирования блочного типа. Однако метод применим для решения и других задач:

- 1) одноэтапной стохастической задачи блочного типа с построчными вероятностными ограничениями [13];
- 2) одноэтапной задачи блочного типа с вероятностными ограничениями и детерминированным решением [7];
- 3) одноэтапной задачи стохастического программирования с решающим распределением нормального вида [18];
- 4) блочной двухэтапной задачи стохастического программирования с непрерывным распределением вектора ограничений [8].

## § 2. Разложение задач оптимального управления

В данном параграфе итеративный метод декомпозиции на основе агрегирования переменных [119] применяется для некоторых конкретных задач оптимального управления. Рассматривается задача управления для системы гармонических осцилляторов. Эта задача имеет решение с разрывными управлениями и метод разложения допускает аналитические конструкции на всех промежуточных этапах. Изучается также задача с квадратичным критерием качества, где приводятся аналитические построения промежуточных задач метода декомпозиции, причем окончательное решение получается за одну или две итерации. Кроме того, рассматриваются модельные оптимизационные задачи из математической экологии, теории упругости, химической технологии прокатного производства. Для этих задач выясняется эффективность использования метода разложения по сравнению с прямыми методами их решения. Во всех указанных задачах имеются оптимизируемые системы, состоящие из большого числа подсистем. Таким образом, метод декомпозиции на основе агрегирования переменных позволяет «перебросить мост» между системным анализом и различными прикладными областями.

**1. Гармонические осцилляторы.** В работе [94] при анализе последствий взрыва исследуется задача оптимального управления для гар-

монического осциллятора, которая формулируется в виде

$$md^2x(t)/dt^2 + kx(t) = u(t), \quad 0 \leq u(t) \leq w, \quad x(T) \rightarrow \max,$$

где  $m$  — масса осциллятора;  $k$  — его жесткость;  $u(t)$  — управляющая функция;  $T$  — конечное время. Осциллятор при  $t = 0$  находится в начале координат и неподвижен.

Рассмотрим систему, принятую состоящей для простоты из двух гармонических осцилляторов, и поставим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= y_1(t), & dx_2(t)/dt &= y_2(t), \\ dy_1(t)/dt &= -\omega_1^2 x_1(t) + u_1(t)/m_1, & dy_2(t)/dt &= -\omega_2^2 x_2(t) + u_2(t)/m_2, \\ 0 \leq u_1(t) &\leq w_1, & 0 \leq u_2(t) &\leq w_2, \\ u_1(t) + u_2(t) &\leq w, \\ f &= \gamma_1 x_1(T) + \gamma_2 x_2(T) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\omega_1^2$ ,  $\omega_2^2$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  — положительные постоянные. В задаче (2.1) есть пара условий, которые состоят из локальных ограничений. Существует также связывающее ограничение на управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , которое объединяет два осциллятора в единую систему.

Сначала решим задачу (2.1), непосредственно используя принцип максимума Понтрягина [91], затем построим ее решение с помощью итеративного метода разложения [117]. Гамильтониан задачи (2.1) имеет вид

$$H = \varphi_1 y_1 + \psi_1 (-\omega_1^2 x_1 + u_1/m_1) + \varphi_2 y_2 + \psi_2 (-\omega_2^2 x_2 + u_2/m_2),$$

а сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям с краевыми условиями

$$\begin{aligned} d\varphi_1(t)/dt &= \omega_1^2 \psi_1(t), & d\psi_1(t)/dt &= -\varphi_1(t), & \varphi_1(T) &= \gamma_1, & \psi_1(T) &= 0, \\ d\varphi_2(t)/dt &= \omega_2^2 \psi_2(t), & d\psi_2(t)/dt &= -\varphi_2(t), & \varphi_2(T) &= \gamma_2, & \psi_2(T) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

так что после интегрирования (2.2) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \gamma_1 \cos \omega_1(T-t), & \psi_1(t) &= (\gamma_1/\omega_1) \sin \omega_1(T-t), \\ \varphi_2(t) &= \gamma_2 \cos \omega_2(T-t), & \psi_2(t) &= (\gamma_2/\omega_2) \sin \omega_2(T-t). \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_1(t) \leq w_1, \quad 0 \leq u_2(t) \leq w_2, \quad u_1(t) + u_2(t) \leq w, \\ [(\gamma_1/m_1\omega_1) \sin \omega_1(T-t)] u_1(t) + \\ + [(\gamma_2/m_2\omega_2) \sin \omega_2(T-t)] u_2(t) \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Примем следующие предположения:  $w_1 > w$ ,  $w_2 > w$ , тогда вторые неравенства в локальных ограничениях (2.3) несущественны. Будем также считать

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \sin \omega_1 T)/(m_1 \omega_1) > (\gamma_2 \sin \omega_2 T)/(m_2 \omega_2), \quad \omega_1 T \leq \pi/2, \quad \omega_2 T < \pi/2, \\ \gamma_1/m_1 < \gamma_2/m_2. \end{aligned}$$



При малых значениях  $t$  первый коэффициент при управлении в функционале (2.3) больше второго. При  $t$ , близких к  $T$ , имеем  $\sin \omega_j (T - t) \sim \omega_j (T - t)$ ,  $j = 1, 2$ , и уже первый коэффициент меньше второго. Таким образом, есть точка переключения  $t^*$ , которая является корнем уравнения

$$\gamma_1 \sin \omega_1 (T - t) / (m_1 \omega_1) = \gamma_2 \sin \omega_2 (T - t) / (m_2 \omega_2),$$

и оптимальное управление задачи (2.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \omega, & t \in [0, t^*), & \quad u_1(t) = 0, & t \in (t^*, T], \\ u_2(t) &= 0, & t \in [0, t^*), & \quad u_2(t) = \omega, & t \in (t^*, T]. \end{aligned}$$

Оптимальное значение  $f^*$  функционала задачи (2.1) легко вычисляется:

$$\begin{aligned} f^* &= \gamma_1 \omega [\cos \omega_1 (T - t^*) - \cos \omega_1 T] / (m_1 \omega_1^2) + \\ &+ \gamma_2 \omega [1 - \cos \omega_2 (T - t^*)] / (m_1 \omega_2^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В методе декомпозиции предполагается рассмотрение агрегированной задачи вида

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= y_1(t), & dx_2(t)/dt &= y_2(t), \\ dy_1(t)/dt &= -\omega_1^2 x_1(t) + \alpha_1(t) U(t) / m_1, \\ dy_2(t)/dt &= -\omega_2^2 x_2(t) + \alpha_2(t) U(t) / m_2, \\ U(t) &\leq \omega, & g &= \gamma_1 x_1(T) + \gamma_2 x_2(T) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где заданы неотрицательные веса агрегирования  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ , причем  $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 1$ .

Сопряженные переменные  $\varphi_j$ ,  $\psi_j$ ,  $j = 1, 2$ , задачи (2.5) совпадают с аналогичными переменными исходной задачи (2.1), а оптимальное управление в (2.5) имеет вид  $U^0 = \omega$ . Двойственная функция  $\delta^0(t)$  для ограничения  $U(t) \leq \omega$  вычисляется так:

$$\delta^0(t) = \gamma_1 \alpha_1(t) \sin \omega_1 (T - t) / (m_1 \gamma_1) + \gamma_2 \alpha_2(t) \sin \omega_2 (T - t) / (m_2 \gamma_2).$$

Зададим на начальной итерации постоянные на отрезке  $[0, T]$  веса  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  и рассмотрим локальные задачи. Первая локальная задача ставится следующим образом:

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= y_1(t), & dy_1(t) &= -\omega_1^2 x_1(t) + u_1(t) / m_1, & 0 \leq u_1(t) \leq \omega_1, \\ f_1 &= \gamma_1 x_1(T) - \int_0^T \delta^0(\tau) u_1(\tau) d\tau \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, для этой задачи имеем

$$\begin{aligned} & \{ (\gamma_1 / \omega_1 m_1) \sin \omega_1 (T - t) - \\ & - [\alpha_1 \gamma_1 \sin \omega_1 (T - t) / (m_1 \omega_1) + \alpha_2 \gamma_2 \sin \omega_2 (T - t) / (m_2 \omega_2)] \} u_1(t) \rightarrow \max, \\ \text{или} & \alpha_2 [\gamma_1 \sin \omega_1 (T - t) / (m_1 \omega_1) - \gamma_2 \sin \omega_2 (T - t) / (m_2 \omega_2)] u_1(t) \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Таким образом получаем разрывное оптимальное управление  $\hat{u}_1(t)$

с точкой переключения в  $t^*$ :

$$\hat{u}_1(t) = w_1 \quad t \in [0, t^*), \quad \hat{u}_1(t) = 0 \quad t \in (t^*, T].$$

Аналогичное решение второй локальной задачи приводит к оптимальному управлению:

$$\hat{u}_2(t) = 0 \quad t \in [0, t^*), \quad \hat{u}_2(t) = w_2 \quad t \in (t^*, T].$$

Далее, согласно общей схеме [117] строятся веса агрегирования  $\alpha_1(t, \rho_1, \rho_2)$ ,  $\alpha_2(t, \rho_1, \rho_2)$  при  $0 \leq \rho_j \leq 1$ ,  $j = 1, 2$ , по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1(t, \rho_1, \rho_2) &= [u_1^0(t) + \rho_1(\hat{u}_1(t) - u_1^0(t))]/U^0 + \rho_1(\hat{u}_1(t) - u_1^0(t)) + \\ &\quad + \rho_2(\hat{u}_2(t) - u_2^0(t)), \\ \alpha_2(t, \rho_1, \rho_2) &= [u_2^0(t) + \rho_2(\hat{u}_2(t) - u_2^0(t))]/U^0 + \rho_1(\hat{u}_1(t) - u_1^0(t)) + \\ &\quad + \rho_2(\hat{u}_2(t) - u_2^0(t)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $u_j^0(t) = \alpha_j(t) U^0$ ,  $j = 1, 2$ . Эти веса имеют разрыв в точке  $t^*$  при всех значениях  $\rho_j \in [0, 1]$ . Если ввести обозначение

$$\bar{\alpha}_j(t, \rho_1, \rho_2) = \alpha_j(t, \rho_1, \rho_2) \quad t \in [0, t^*];$$

$$\tilde{\alpha}_j(t, \rho_1, \rho_2) = \alpha_j(t, \rho_1, \rho_2) \quad t \in (t^*, T],$$

то легко получить формулу оптимального значения функционала  $g^0(\rho_1, \rho_2)$  как функцию параметров  $\rho_1, \rho_2$ :

$$\begin{aligned} g^0(\rho_1, \rho_2) &= \gamma_1 \omega / (m_1 \omega_1^2) [(\bar{\alpha}_1(\rho_1, \rho_2) - \tilde{\alpha}_1(\rho_1, \rho_2)) \cos \omega_1(T - t^*) - \\ &\quad - \bar{\alpha}_1(\rho_1, \rho_2) \cos \omega_1 T + \tilde{\alpha}_1(\rho_1, \rho_2)] + \gamma_2 \omega / (m_2 \omega_2^2) [(\bar{\alpha}_2(\rho_1, \rho_2) - \\ &\quad - \tilde{\alpha}_2(\rho_1, \rho_2)) \cos \omega_2(T - t^*) - \bar{\alpha}_2(\rho_1, \rho_2) \cos \omega_2 T + \tilde{\alpha}_2(\rho_1, \rho_2)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Возьмем  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , тогда функция  $g^0(\rho)$  имеет максимум в точке  $\rho = 1$ , при этом  $\bar{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$ ,  $\bar{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$ , и по формуле (2.7) определим оптимальное значение функционала (2.4) исходной задачи (1.1). Таким образом, оптимальное решение получено на одну итерацию. Остается проверить критерий оптимальности [117]

$$\pi_1 = \gamma_1 \hat{x}_1(T) + \gamma_2 \hat{x}_2(T) - \int_0^T \delta^0 \omega dt - \int_0^T \delta^0 (\hat{u}_1 + \hat{u}_2) dt - \gamma_1 x_1^0(T) - \gamma_2 x_2^0(T),$$

где величины  $x_j^0(T)$ ,  $j = 1, 2$ , соответствуют дезагрегированным управлениям  $u_j^0(t)$ ,  $j = 1, 2$ .

Для оптимальных весов имеем выражение функции

$$\delta^0(t) = \gamma_1 \sin \omega_1(T - t) / (m_1 \omega_1) \quad t \in [0, t^*];$$

$$\delta^0(t) = \gamma_2 \sin \omega_2(T - t) / (m_2 \omega_2) \quad t \in (t^*, T],$$

откуда легко получаем  $\pi_1 = 0$ .

2. Модель с квадратичным критерием качества. В работе [27] изучается простейшая модель оптимального пристреливания, которая описывается следующим образом:

$$dx(t)/dt = u(t), \quad x(0) = \kappa, \quad 0,5cx^2(T) + 0,5 \int_0^T u^2(\tau) d\tau \rightarrow \min,$$

где  $\kappa, c$  — постоянные величины. Так же, как в п. 1, рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем, которая формализуется в виде

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= u_1(t), \quad x_1(0) = \kappa_1, \quad dx_2(t)/dt = u_2(t), \quad x_2(0) = \kappa_2, \\ u_1(t) &\geq 0, \quad u_2(t) \geq 0 \\ u_1(t) + u_2(t) &\leq \omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$0,5c_1x_1^2(T) + 0,5\gamma_1 \int_0^T u_1^2(\tau) d\tau + 0,5c_2x_2^2(T) + 0,5\gamma_2 \int_0^T u_2^2(\tau) d\tau \rightarrow \min,$$

где  $\kappa_1, \kappa_2 < 0, c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ .

Сначала будем решать задачу (2.8), непосредственно используя принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан запишется так:

$$H = -0,5\gamma_1 u_1^2 - 0,5\gamma_2 u_2^2 + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2,$$

а для сопряженных переменных имеем

$$d\psi_1(t)/dt = 0, \quad \psi_1(T) = -c_1x_1(T); \quad d\psi_2(t)/dt = 0, \quad \psi_2(T) = -c_2x_2(T),$$

откуда получается  $\psi_j(t) = \text{const} = -c_jx_j(T), j = 1, 2; t \in [0, T]$ . Приходим к задаче

$$\begin{aligned} u_1(t) &\geq 0, \quad u_2(t) \geq 0; \quad u_1(t) + u_2(t) \leq \omega, \\ -0,5\gamma_1 u_1^2(t) - 0,5\gamma_2 u_2^2(t) - c_1x_1(T)u_1(t) - c_2x_2(T)u_2(t) &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

При достаточно больших по абсолютному значению  $\kappa_1, \kappa_2$  связывающее условие является существенным, и тогда имеем задачу безусловной минимизации

$$-0,5\gamma_1 u_1^2 - 0,5\gamma_2 u_2^2 - c_1x_1(T)u_1 - c_2x_2(T)u_2 + \lambda(\omega - u_1 - u_2) \rightarrow \min,$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа, а  $x_1(T), x_2(T)$  — пока неизвестные постоянные. После дифференцирования получаем систему уравнений

$$-\gamma_1 u_1 - c_1x_1(T) - \lambda = 0, \quad -\gamma_2 u_2 - c_2x_2(T) - \lambda = 0, \quad u_1 + u_2 = \omega,$$

решение которой имеет вид

$$u_1 = (-c_1x_1(T) + c_2x_2(T) + \gamma_2\omega)/(\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$u_2 = (c_1x_1(T) - c_2x_2(T) + \gamma_1\omega)/(\gamma_1 + \gamma_2).$$

Таким образом, оптимальные управления постоянны на отрезке  $[0, T]$ . Остается определить неизвестные  $x_1(T), x_2(T)$  из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \kappa_1 + (-c_1x_1(T) + c_2x_2(T) + \gamma_2\omega)T/(\gamma_1 + \gamma_2), \\ x_2(T) &= \kappa_2 + (c_1x_1(T) - c_2x_2(T) + \gamma_1\omega)T/(\gamma_1 + \gamma_2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

откуда получаем

$$x_1(T) = [c_2 T (\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_1 (\gamma_1 + \gamma_2) + \omega T (c_2 T + \gamma_2)] / (\gamma_1 + \gamma_2 + T(c_1 + c_2)),$$

$$x_2(T) = [c_1 T (\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_2 (\gamma_1 + \gamma_2) + \omega T (c_1 T + \gamma_1)] / (\gamma_1 + \gamma_2 + T(c_1 + c_2)),$$

и окончательно

$$u_1(t) = (\Lambda + \Omega_1) / (\gamma_1 + \gamma_2 + T(c_1 + c_2)),$$

$$u_2(t) = (-\Lambda + \Omega_1) / (\gamma_1 + \gamma_2 + T(c_1 + c_2)),$$

где  $\Lambda = c_2 \kappa_2 - c_1 \kappa_1$ ,  $\Omega_1 = (\lambda_1 + c_1 T)$ ,  $\Omega_2 = (\gamma_2 + c_2 T)$ . При этом если  $-\Omega_2 \leq \Lambda \leq \Omega_1$ , то  $u_1(t), u_2(t) \geq 0$ . Заметим, что последнее предположение выполнено при  $\Lambda = 0$ , т. е. когда  $c_1 \kappa_1 = c_2 \kappa_2$ .

Далее проанализируем решение задачи (2.8) методом декомпозиции [117]. Рассмотрим агрегированную задачу при заданных постоянных весах  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Имеем:

$$dx_1(t)/dt = \alpha_1 U, \quad x_1(0) = \kappa_1; \quad dx_2(t)/dt = \alpha_2 U, \quad x_2(0) = \kappa_2, \\ 0 \leq U \leq \omega, \quad (2.10)$$

$$g = 0,5c_1 x_1^2(T) + 0,5\gamma_1 \alpha_1^2 \int_0^T U^2 d\tau + 0,5c_2 x_2^2(T) + 0,5\gamma_2 \alpha_2^2 \int_0^T U^2 d\tau \rightarrow \min.$$

Сопряженные функции агрегированной задачи такие же, как в исходной (2.1), а из принципа максимума Понтрягина следует

$$(-\alpha_1 c_1 x_1(T) - \alpha_2 c_2 x_2(T)) U - (0,5\gamma_1 \alpha_1^2 + 0,5\gamma_2 \alpha_2^2) U^2 \rightarrow \max, \\ 0 \leq U \leq \omega,$$

откуда для оптимального управления  $U^0$  получаем

$$U^0 = \min(\omega, U^*), \quad U^* = -(\alpha_1 c_1 x_1(T) + \alpha_2 c_2 x_2(T)) / (\gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_2 \alpha_2^2). \quad (2.11)$$

Пусть минимум в (2.11) достигается при  $U^0 = \omega$ , тогда легко вычислить выражение для  $U^*$ :

$$U^* = (-\alpha_1 c_1 \kappa_1 - \alpha_2 c_2 \kappa_2) / (\gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_2 \alpha_2^2) + T(c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2).$$

Неравенство  $U^* > \omega$  выполняется при всех значениях  $\alpha_1, \alpha_2$ , когда величины  $\kappa_1, \kappa_2$  являются достаточно большими по абсолютному значению.

Сопряженная переменная  $\delta^0$ , соответствующая ограничению  $U \leq \omega$ , записывается в виде

$$\delta^0 = -\alpha_1 c_1 (\kappa_1 + \alpha_1 \omega T) - \alpha_2 c_2 (\kappa_2 + \alpha_2 \omega T) + (\gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_2 \alpha_2^2) \omega.$$

Рассмотрим первую локальную задачу

$$dx_1(t)/dt = u_1(t), \quad x_1(0) = \kappa_1, \quad u_1(t) \geq 0, \\ 0,5c_1 x_1(T) + 0,5\gamma_1 \int_0^T u_1^2 d\tau + \int_0^T \delta^0 u_1 d\tau \rightarrow \min.$$

Имеем  $\psi_1(t) = -c_1 x_1(T)$ . На основании принципа максимума Понтря-

гина получаем

$$-c_1 x_1(T) u_1 - 0,5 \gamma_1 u_1^2 - \delta^0 u_1 \rightarrow \max \quad u_1 \geq 0,$$

откуда

$$\hat{u}_1(t) = -(c_1 x_1(T) + \delta^0) / \gamma_1,$$

и, кроме того,

$$x_1(T) = (\kappa_1 \gamma_1 - \delta^0 T) / (\gamma_1 + c_1 T).$$

Необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $u_1 > 0$ , что приводит к неравенству

$$-c_1 (\kappa_1 \gamma_1 - \delta^0 T) / (\gamma_1 + c_1 T) - \delta^0 > 0,$$

или окончательно

$$-\alpha_2 \Lambda + [\alpha_1^2 (c_1 T - \gamma_1) + \alpha_2^2 (c_2 T - \gamma_2)] w > 0.$$

Если значение  $\Lambda$  достаточно мало, то последнее неравенство выполняется при  $c_j T - \gamma_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ . В таком случае, как легко убедиться, и во второй локальной задаче  $\hat{u}_2 > 0$ , причем оптимальные управления локальных задач имеют вид

$$u_j = [\xi_j \Lambda + w [\alpha_1^2 (c_1 T - \gamma_1) + \alpha_2^2 (c_2 T - \gamma_2)] / (\gamma_j + c_j T)], \quad j = 1, 2;$$

$$\xi_j = \alpha_2 \quad j = 1; \quad \xi_j = -\alpha_1 \quad j = 2.$$

Далее рассмотрим оптимальное значение функционала агрегированной задачи как функцию весов  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$g^0(\alpha_1, \alpha_2) = (-c_1 \kappa_1^2 - 2c_1 \kappa_1 \alpha_1 w T - c_1 \alpha_1^2 w^2 T^2 - w^2 \gamma_1 \alpha_1^2 T - c_2 \kappa_2^2 - 2c_2 \kappa_2 \alpha_2 w T - c_2 \alpha_2^2 w^2 T^2 - w^2 \gamma_2 \alpha_2^2 T) / 0,5.$$

Полагая  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = 1 - \alpha$ , находим стационарную точку функции  $g^0(\alpha, 1 - \alpha)$ :

$$\alpha = (\Lambda / w + (c_2 T + \gamma_2)) / [(c_1 T + \gamma_1) + (c_2 T + \gamma_2)],$$

что соответствует весовому коэффициенту, вычисленному для оптимального решения исходной задачи (2.8). Будем рассматривать весовые коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2$  как функции параметра  $\rho$ , вычисляя их по формуле (1.6) при  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ . Попытаемся найти точку  $\rho^0$ , в которой выполняется равенство

$$\alpha_1^{\text{опт}} = (\Lambda_1 / w + (c_2 T + \gamma_2)) / [(c_1 T + \gamma_1) + (c_2 T + \gamma_2)].$$

После довольно кропотливых выкладок получаем

$$\rho^0 = (A - \Lambda) / [(A - \Lambda) + \Lambda (-1 + (\alpha_2 \Lambda + \Omega) / (\gamma_1 + c_1 T) + (-\alpha_1 \Lambda + \Omega) / (\gamma_2 + c_2 T))],$$

где  $A = \alpha_1 (c_1 T + \gamma_1) - \alpha_2 (c_2 T + \gamma_2)$ ;  $\Omega = \alpha_1^2 (c_1 T - \gamma_1) + \alpha_2^2 (c_2 T - \gamma_2)$ . Если  $\Lambda = 0$ , то максимум функции  $g^0(\rho)$  достигается при  $\rho^0 = 1$ , и оптимальное решение исходной задачи всегда вычисляется за одну итерацию. За счет выбора начальных весов можно сделать для определенности  $A > 0$ . Если при этом значение  $\Lambda$  положительно и достаточно мало и, кроме того,

$$-1 + (\alpha_2 \Lambda + \Omega) / (\gamma_1 + c_1 T) + (-\alpha_1 \Lambda + \Omega) / (\gamma_2 + c_2 T) > 0,$$

то  $\rho^0 < 1$ ,  $\rho \sim 1$ , т. е. максимум функции  $g^0(\rho)$  достигается внутри отрезка  $[0, T]$ , и решение исходной задачи получается за одну итерацию. Если же последнее неравенство имеет противоположный смысл, то  $\rho^0 > 1$ ,  $\rho \sim 1$ , и решение исходной задачи получается за две итерации.

Таким образом, прямое решение исходной задачи (2.8) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (2.9). При достаточно большом количестве подсистем эта процедура весьма трудоемка при реализации на ЭВМ. Можно представить ситуацию, когда возникает проблема ограниченной оперативной памяти ЭВМ. Использование метода разложения исключает эту проблему. Кроме того, поскольку локальные задачи являются независимыми, то они могут быть распараллелены на многопроцессорных ЭВМ [47].

**3. Задача оптимального сбора урожая в однородных популяциях.** Изучаемая в работе [102] модель непрерывного сбора урожая из однокомпактного биогеоценоза выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} dG(t)/dt &= (N(t) - q(t))(\beta - \mu(N(t) - q(t))), \\ dN(t)/dt &= -\sigma q(t) + (N(t) - q(t))(\beta - \mu(N(t) - q(t))), \\ G(0) = N(0) &= N_0, \quad 0 \leq q(t) \leq N(t) \\ G(T) &\rightarrow \max. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь  $N(t)$  — численность популяции, из которой к моменту  $t$  отбирается  $g(t)$  особей. Вторым уравнением в (2.12) описывается динамика численности популяций, где коэффициенты  $\beta$  и  $\mu$  характеризуют соответственно естественный прирост и конкуренцию особей в популяции. Функция  $G(t)$  определяется в виде

$$G(t) = \int_0^t \sigma q(\tau) d\tau + N(t), \quad dq(t)/dt = \sigma q(t),$$

что соответствует сумме собранного урожая и оставшихся в популяции особей. Переменная  $q(t)$  играет роль управления,  $\sigma$  — коэффициент пропорциональности.

Предположим, что осуществляется централизованный процесс сбора урожая для простоты из двух биогеоценозов, при этом существует ограничение на сумму отбираемых особей. Приходим к задаче

$$\begin{aligned} dG_j(t)/dt &= (N_j(t) - q_j(t))[\beta_j - \mu_j(N_j(t) - q_j(t))], \\ dN_j(t)/dt &= -\sigma_j q_j(t) + (N_j(t) - q_j(t))[\beta_j - \mu_j(N_j(t) - q_j(t))], \\ N_j(0) = G_j(0) &= N_j^0, \quad 0 \leq q_j(t) \leq N_j(t), \quad j = 1, 2, \\ q_1(t) + q_2(t) &\leq w(t), \\ \gamma_1 G_1(t) + \gamma_2 G_2(t) &\rightarrow \max, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где постоянные коэффициенты  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  характеризуют ценность особей.

Сначала рассмотрим прямое решение задачи (2.13) с использованием принципа максимума Понтрягина. Гамильтониан задачи (2.13)

имеет вид

$$H = \varphi_1(N_1 - q_1)[\beta_1 - \mu_1(N_1 - q_1)] + \psi_1(N_1 - q_1)[\beta_1 - \mu_1(N_1 - q_1)] - \\ - \psi_1\sigma_1q_1 + \varphi_2(N_2 - q_2)[\beta_2 - \mu_2(N_2 - q_2)] + \\ + \psi_2(N_2 - q_2)[\beta_2 - \mu_2(N_2 - q_2)] - \psi_2\sigma_2q_2,$$

а сопряженные переменные  $\varphi_j, \psi_j, j = 1, 2$  удовлетворяют уравнениям с граничными условиями вида

$$d\varphi_j(t)/dt = 0 \quad \varphi_j(T) = \gamma_j,$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &= \gamma_j \quad t \in [0, T], \\ -d\psi_j(t)/dt &= \gamma_j\beta_j - 2\gamma_j\mu_j(N_j - q_j) + \beta_j\psi_j - 2\mu_j\psi_j(N_j - q_j), \\ \psi_j(T) &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Будем предполагать, что связывающее условие в (2.13) является существенным. Тогда использование принципа максимума Понтрягина приводит к системе уравнений относительно  $q_1, q_2, \lambda$ :

$$\begin{aligned} -\beta_j\gamma_j + 2\gamma_j\mu_j(N_j - q_j) - \psi_j\beta_j + \psi_j2\mu_j(N_j - q_j) - \sigma_j\psi_j - \lambda &= 0, \\ j &= 1, 2; \quad q_1 + q_2 = \omega, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа, соответствующий связывающему ограничению в (2.13). Решение этой системы для него следующее:

$$\begin{aligned} \lambda &= [N_1 + N_2 - \omega(\alpha_1/2\mu_1 + \alpha_2/2\mu_2)2\mu_1\mu_2(\gamma_1 + \psi_1)(\gamma_2 + \\ &+ \psi_2)/[\mu_1(\gamma_1 + \psi_1) + \mu_2(\gamma_2 + \psi_2)] - [\mu_2(\gamma_2 + \psi_2)\sigma_1\psi_1 + \\ &+ \mu_1(\gamma_1 + \psi_1)\sigma_2\psi_2]/[\mu_1(\gamma_1 + \psi_1) + \mu_2(\gamma_2 + \psi_2)]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Уравнения для  $\psi_j$  из (2.14) преобразуются к виду

$$d\psi_j(t)/dt = \sigma_j\psi_j(t) + \lambda, \quad \psi_j(T) = 0. \quad (2.17)$$

Таким образом, решение исходной задачи сводится к интегрированию двухточечной задачи, которая задается вторыми дифференциальными уравнениями из (2.13), где управления  $q_j(t), j = 1, 2$ , выражаются из невыписанных решений системы (2.15), а также уравнениями (2.16), в которых  $\lambda$  вычисляется согласно (2.16). Решение указанной двухточечной задачи существенно усложняется с ростом количества подсистем, так как в этом случае уже не просто решить систему линейных алгебраических уравнений типа (2.15), тем более саму двухточечную задачу. Здесь может оказаться недостаточным имеющийся объем памяти ЭВМ, о котором уже было указано в п. 2.

Далее рассмотрим решение задачи (2.13) методом разложения. Зададимся весовыми функциями  $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \geq 0$ , такими, что  $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 1$ , и выпишем агрегированную задачу:

$$\begin{aligned} dG_j(t)/dt &= (N_j(t) - \alpha_j(t)Q(t))[\beta_j - \mu_j(N_j(t) - \alpha_j(t)Q(t))], \\ dN_j(t)/dt &= -\sigma_j\alpha_j(t)Q(t) + (N_j(t) - \alpha_j(t)Q(t)) \times \\ &\times [\beta_j - \mu_j(N_j(t) - \alpha_j(t)Q(t))], \\ 0 \leq \alpha_j(t)Q(t) &\leq N_j(t), \quad G_j(t) = N_j(t) = N_j^0, \quad j = 1, 2, \\ 0 \leq Q(t) &\leq \omega(t), \quad \gamma_1G_1(T) + \gamma_2G_2(T) \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если оптимальное решение той задачи  $Q^0(t) = w(t)$ , то сопряженная функция  $\delta^0(t)$  ограничения  $Q(t) \leq w(t)$  вычисляется в виде

$$\delta^0(t) = \sum_{j=1}^2 [-\alpha_j \beta_j \gamma_j + 2\mu_j (N_j - \alpha_j Q^0) \gamma_j \beta_j - \alpha_j \sigma_j + \\ + [-\alpha_j \beta_j + 2\alpha_j \beta_j (N_j - \alpha_j Q^0)] \psi_j,$$

где функции  $N_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , получаются после интегрирования вторых дифференциальных уравнений в (2.18), а  $\psi_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , вычисляются после интегрирования уравнений

$$-d\psi_j(t)/dt = \gamma_j \beta_j - 2\mu_j (N_j - \alpha_j Q^0) + \beta_j \psi_j - 2\mu_j (N_j - \alpha_j Q^0), \\ \psi_j(T) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим локальные задачи, которые в данном случае имеют вид

$$\gamma_j G_j(T) - \int_0^T \delta^0(\tau) q_j(\tau) d\tau \rightarrow \max, \quad j = 1, 2,$$

при условиях, задаваемых локальными связями (2.13) при каждом фиксированном  $j = 1, 2$ .

Использование принципа максимума Понтрягина для локальных задач приводит к независимым уравнениям

$$-\gamma_j \beta_j + \gamma_j 2\mu_j (N_j - q_j) - \psi_j \beta_j + \psi_j 2\mu_j (N_j - q_j) - \sigma_j \psi_j - \delta^0 = 0, \quad (2.19) \\ j = 1, 2,$$

где сопряженные функции  $\psi_j(t)$  удовлетворяют уравнениям (2.13). Из (2.13), (2.19) получаем простую связь

$$d\psi_j(t)/dt = \sigma_j \psi_j + \delta^0, \quad \psi_j(T) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.20)$$

После интегрирования (2.20) и подстановки  $\psi_j(t)$  в (2.19) легко находят величины  $N_j - q_j$ , а затем и оптимальные управления  $\hat{q}_j(t)$  локальных задач. Таким образом, решение задачи (2.13) методом разложения существенно проще, чем ее непосредственное решение, что особенно становится очевидным с ростом  $J$ .

**4. Модель из теории упругости.** В работе [115а] изучается задача о форме стержня, выдерживающего без изгиба данную предельную сжимающую нагрузку  $P$  и имеющего наименьший вес (или объем). Дифференциальное уравнение изгиба центрально сжатого стержня имеет вид

$$EI d^2 z(l)/dl^2 + Pz(l) = 0,$$

где  $E$  — коэффициент жесткости;  $I$  — момент инерции;  $z$  — смещение стержня. Это уравнение записывается в виде системы

$$dz(l)/dl = \chi(l), \quad d\chi(l)/dl = -Pz(l)/u(l).$$

Здесь  $\chi$  — угол наклона, а величина  $u(l) = EI(l)$  рассматривается в качестве управляющей функции, которая определяется соответствующим подбором площади поперечного сечения стержня как функции



координаты  $l$  (в работе [102] для определенности принимается линейная зависимость между моментом инерции и площадью поперечного сечения).

Фазовые координаты подчиняются граничным условиям

$$z(0) = 0, \quad \chi(L) = 0$$

и ставится задача на минимум объема стержня

$$\int_0^L u(l) dl \rightarrow \min.$$

Представим централизованное производство из единого материала  $J$  стержней одинаковой длины  $L$ , каждое из которых выполняет указанную выше функцию с предельной нагрузкой  $P_j$ . Предположим, что количество материала при изготовлении стержней ограниченное. Приходим к следующей задаче:

$$dz_j(l)/dl = \chi(l), \quad d\chi(l)/dl = P_j z_j(l)/u_j(l), \quad z_j(0) = 0, \quad \chi_j(L) = 0, \\ u_j(l) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad \sum_{j=1}^J u_j(l) \leq w(l), \quad (2.21)$$

$$f = \sum_{j=1}^J \int_0^L \gamma_j u_j(l) dl \rightarrow \min,$$

где  $\gamma_j$  — коэффициенты важности, а  $w(l)$  — заданная функция, удовлетворяющая условию ограничения количества материала вида

$$\int_0^L w(l) dl \leq W - \text{const.}$$

Вид функции целесообразно определить после решения задачи о единственном стержне [102].

Сначала рассмотрим прямое решение задачи (2.21) с использованием принципа максимума Понтрягина. Гамильтониан задачи (2.21) имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^J (\varphi_j \chi_j - \psi_j P_j z_j / u_j - \gamma_j u_j),$$

а сопряженные переменные удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям и граничным условиям

$$d\varphi_j(t)/dt = P_j \psi_j(t)/u_j(t), \quad d\psi_j(t)/dt = -\varphi_j(t), \quad \varphi_j(L) = \psi_j(0) = 0. \quad (2.22)$$

Сравнивая эти соотношения с уравнениями и граничными условиями для фазовых координат (2.21), заключаем, что можно принять

$$z_j(l) = \psi_j(l), \quad \chi_j(l) = \varphi_j(l), \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Будем предполагать, что связывающее условие в (2.21) существенно, тогда после дифференцирования гамильтониана получаем систему уравнений

$$P_j z_j^2 / u_j^2 - \gamma_j - \lambda = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad \sum_{j=1}^J u_j = w, \quad (2.23)$$

где роль неизвестных играют величины  $u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , и  $\lambda$  — множитель Лагранжа для связывающего условия. К сожалению из системы (2.23) невозможно получить аналитическую зависимость управления от  $z_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $\omega$  или по крайней мере найти зависимость  $z_j/u_j$  от  $\gamma_j$ ,  $\omega$ . Тогда можно было бы проинтегрировать уравнения задачи (2.21).

Далее будем решать задачу (2.21) методом декомпозиции. Дифференциальные уравнения агрегированной задачи заменяются следующими:

$$d\chi_j(l)/dl = z_j(l) P_j/\alpha_l(l) U(l), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (2.24)$$

где  $\alpha_j(l)$  весовые функции,  $U(l)$  — агрегированное управление. Если условие  $U(l) \leq \omega(l)$  агрегированной задачи является существенным, то соответствующая ему сопряженная функция  $\delta^0(l)$  записывается в виде

$$\delta^0(l) = \sum_{j=1}^J (z_j(l)/\alpha_j(l) \omega(l)).$$

Здесь функции  $z_j(l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, J$ , уже определены после интегрирования (2.24) и уравнений для  $d\chi_j(l)/dl$ .

Рассмотрим локальные задачи. Их функционалы имеют вид

$$\int_0^l (\gamma_j + \delta^0(l)) u_j(l) dl \rightarrow \min, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

а связи задаются уравнениями из (2.21) при каждом фиксированном  $j$ . Сопряженные функции удовлетворяют уравнениям (2.22), а принцип максимума Понтрягина приводит к задачам

$$-z_j^2/u_j - (\gamma_j + \delta^0) u_j \rightarrow \max, \quad u_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

откуда после дифференцирования получаем простую формулу

$$z_j/u_j = \sqrt{\gamma_j + \delta^0}.$$

Подставляя ее в правую часть второго дифференциального уравнения задачи (2.21), окончательно находим оптимальные управления локальных задач.

Таким образом, решение задачи (2.21) методом разложения намного проще по сравнению с ее прямым решением. По аналогичной схеме исследуются задачи теории упругости, подобные задаче (2.21).

**5. Распределение температуры в химических реакторах.** Исследуется задача оптимального управления температурным режимом при протекании в реакторе двух последовательных реакций первого порядка. Модель имеет вид

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= k^1 x(t), \quad dy(t)/dt = k^1 x(t) - k^2 y(t), \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \\ 0 < x^0 &\leq 1, \quad 0 \leq y^0 \leq 1, \quad k^1 = k^{10} \exp(-E^1/R\theta), \quad k^2 = k^{20} \exp(-E^2/R\theta), \\ y(T) &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Здесь  $x$  и  $y$  — мольные доли соответственно исходного и промежуточного веществ,  $\theta$  — температура,  $k^1$  и  $k^2$  — константы химических

реакций, которые вычисляются по формуле Аррениуса. Необходимо показать, что при  $E^2 > E^1$  оптимальное управление  $\theta$  является непрерывной функцией.

Представим, что существует  $J$  химических реакторов и распределение температуры происходит централизованно. Такая ситуация возникает, когда температура пропорциональна количеству сжимаемого топлива, так что, по сути дела, происходит распределение топлива по подсистемам. Приходим к задаче

$$\begin{aligned} dx_j(t)/dt &= k_j^1 x_j(t), \quad dy_j(t)/dt = k_j^1 x_j(t) - k_j^2 y_j(t), \\ x_j(0) &= x_j^0, \quad y_j(0) = y_j^0, \\ 0 < x_j < 1, \quad 0 \leq y_j < 1, \quad k_j^1 &= k_j^{10} \exp(-E_j^1/R\theta_j(t)), \\ k_j^2 &= k_j^{20} \exp(-E_j^2/R\theta_j(t)), \\ \sum_{i=1}^J \theta_i(t) &\leq \omega(t), \quad f = \sum_{i=1}^J \gamma_i y_i(T) \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Вначале попытаемся решить задачу (2.25), непосредственно используя принцип максимума Понтрягина. Пусть для простоты  $y_j^0 = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^J (k_i^1 x_i \varphi_i + k_i^1 x_i \psi_i - k_i^2 y_i \psi_i),$$

а сопряженные функции удовлетворяют следующим уравнениям с граничными условиями

$$\begin{aligned} d\varphi_j(t)/dt &= k_j(\psi_j(t) - \varphi_j(t)), \quad d\psi_j(t)/dt = k_j\psi_j(t); \\ \varphi_j(T) &= 0, \quad \psi_j(T) = \gamma_j. \end{aligned} \quad (2.26)$$

После интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &= \gamma_j k_j^1 / (k_j^1 + k_j^2) [\exp(-k_j^2(T-t)) - \exp(-k_j^1(T-t))], \\ \psi_j(t) &= \gamma_j \exp(k_j^2(t-T)), \quad x_j(t) = x_j^0 \exp(k_j^1 t), \\ y_j(t) &= x_j^0 k_j^1 / (k_j^1 + k_j^2) [\exp(k_j^1 t) - \exp(k_j^2 t)]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Если предположить, что связывающее условие в (2.25) является существенным, то приходим к системе уравнений относительно  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , и  $\lambda$  ( $\lambda$  — множитель Лагранжа связывающего условия):

$$\begin{aligned} \partial/\partial\theta_j \{x_j^0 \gamma_j [2(k_j^1)^2 (\exp(-k_j^1 T) + (k_j^1 + k_j^2)t - (k_j^1)^2 \exp(k_j^1 T) + \\ + k_j^1 k_j^2 \exp(-k_j^2 T)] / (k_j^1 + k_j^2) - \lambda\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (2.28) \\ \sum_{i=1}^J \theta_i = \omega. \end{aligned}$$

Учитывая зависимость  $k_j^1, k_j^2$  от  $\theta$ , можно сделать вывод о том, что выписанная система (2.28) весьма не проста, и усложняется с увеличением  $J$ .

Далее будем решать задачу (2.25) методом разложения. Если в агрегированных задачах при фиксированных весах  $\alpha_j(t)$  выполняется

равенство  $\sum_{j=1}^J \theta_j = \theta = \omega$ , то не сразу вычисляется сопряженная функция  $\delta^0(t)$ , соответствующая условию  $\theta \leq \omega$ . Функционалы локальных задач имеют вид

$$\gamma_j y_j(T) - \int_0^T \delta^0(\tau) \theta_j(\tau) d\tau \rightarrow \max.$$

Сопряженные функции локальных задач вычисляются по формулам (2.27). Принцип максимума для этих задач приводит к равенству

$$\begin{aligned} \partial/\partial \theta_j \{ x_j^0 \gamma_j [2(k_j^1)^2 (\exp(-k_j^1 T + (k_j^1 + k_j^2)t - (k_j^1)^2 \exp(k_j^1 T)) + \\ + k_j^1 k_j^2 \exp(-k_j^2 T)] / (k_j^1 + k_j^2) - \delta^0 = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из равенства (2.29) можно вывести зависимость оптимального управления  $\hat{\theta}(t)$  от  $t$ . Ясно, что решение уравнений типа (2.29) намного проще, чем решение системы (2.28). Это обстоятельство указывает на эффективность разложения в данном случае.

**6. Оптимальный нагрев металлических пластин.** Изучается задача оптимального одностороннего нагрева пластины, на которой нарастает окалина по закону

$$dx(t)/dt = \eta (\theta(t))^n \exp(-v/\theta(t)), \quad x(0) = x^0,$$

где  $x(t)$  — квадрат толщины слоя окисления,  $\theta$  — температура (управление),  $\eta > 0$ ,  $v > 0$  — константы, характеризующие взаимодействие металла с атмосферой. В качестве критерия выбирается минимизация окалины в конечный момент времени  $T$ .

Так же, как в п. 5, рассмотрим централизованный обогрев системы, состоящей из  $J$  пластин, и поставим следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned} dx_j(t)/dt = \eta_j (\theta(t))^{-1} \exp(-v_j/\theta_j(t)), \quad \dot{x}_j(0) = x_j^0, \quad \theta_j(t) \geq \bar{\theta}_j - \text{const}, \\ j = 1, 2, \dots, J, \quad \sum_{j=1}^J \theta_j(t) \leq \omega(t), \quad f = \sum_{j=1}^J \gamma_j x_j(T) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где для простоты принято  $n = -1$  (закон Эванса, а также  $\bar{\theta}_j > v_j$ . Величины  $\gamma_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , — коэффициенты предпочтения.

Гамильтониан задачи (2.30) имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^J \varphi_j \eta_j \theta_j^{-1} \exp(-v_j/\theta_j),$$

а сопряженные функции удовлетворяют уравнениям с условиями на конце отрезка

$$d\varphi_j(t)/dt = 0, \quad \varphi_j(T) = -\gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

откуда имеем  $\varphi_j(t) = -\gamma_j$   $t \in [0, T]$ .

Если связывающее условие в (2.30) является существенным, то принцип максимума Понтрягина приводит к следующей системе уравнений

относительно  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , и  $\lambda$ :

$$-\gamma_j \eta_j (v_j - \theta_j) / (\theta_j)^3 \exp(-v_j / \theta_j) - \lambda = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

$$\sum_{j=1}^J \theta_j = \omega, \quad (2.31)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа, соответствующий связывающему ограничению в (2.30).

Использование метода разложения для задач (2.31) в предположении, что агрегированные задачи имеют решение  $\theta = \omega$ , приводит к локальным задачам с функционалами

$$\gamma_j x_j(T) + \int_0^T \delta^0(\tau) \theta_j(\tau) d\tau \rightarrow \min,$$

где  $\delta^0(t)$  — сопряженная функция для условия  $\theta \leq \omega$  в агрегированной задаче, которую легко найти. Из применения принципа максимума Понтрягина к локальным задачам следует:

$$-\gamma_j \eta_j (v_j - \theta_j) / (\theta_j)^3 \exp(-v_j / \theta_j) - \delta^0 = 0, \quad (2.32)$$

откуда находятся оптимальные управления  $\hat{\theta}_j(t)$ . Ясно, что решение независимых уравнений (2.32) проще, чем решение сложной нелинейной системы (2.31).

### § 3. Разложение управляемых динамических процессов со случайными возмущениями

Рассматривается динамический случайный процесс, который задается стохастическим дифференциальным уравнением вместе с уравнением для наблюдения вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + b(t) + F(t)\xi(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

$$y(t) = Q(t)x(t) + \xi_0(t).$$

Здесь  $x(t)$  и  $y(t)$  — случайные векторы соответственно фазовых координат и наблюдения размерности  $n$  и  $l$ ;  $\xi(t)$  и  $\xi_0(t)$  — гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными матрицами  $y(t)\delta(t-S)$  и  $\sigma(t)\delta(t-S)$ ;  $\delta(t)$  — дельта-функция;  $A(t)$ ,  $F(t)$ ,  $Q(t)$  — матрицы;  $b(t)$  — вектор с согласованными размерностями, которые считаются заданными.

Как известно, цель наблюдения заключается в нахождении условного математического ожидания и ковариационной матрицы  $D(t)$  вектора фазовых координат  $x(t)$  при условии, что известно наблюдение  $y(t)$ . Известно также, что матрицы ковариации нормально распределенного вектора  $x(t)$  удовлетворяет следующему уравнению фильтра Калмана:

$$\frac{dD}{dt} = AD + DA^T - DQ^T\sigma^{-1}QD + FGF^T, \quad (3.2)$$

$$D(0) = D_0,$$

где  $D_0$  — ковариационная матрица распределения фазового вектора в начале процесса наблюдения.

Введем обозначения

$$V(t) = Q^T(t) \sigma^{-1} Q(t), \quad K(t) = F(t) G(t) F^T(t)$$

и так же, как в работе [122], будем рассматривать задачи об оптимизации помех, когда управляющая сторона стремится затруднить наблюдение за динамической системой, создавая шумы в канале наблюдения. Формально речь идет о выборе управляющей функции  $V(t)$ , которая удовлетворяет некоторым ограничениям, при этом максимизируется дисперсия в конечный момент времени  $T$ .

В указанной работе изучается конкретная модель управления, когда можно принять

$$\sigma(t) = \sigma_0 r(t), \quad V(t) = V_0 [r(t)]^{-1},$$

где  $\sigma_0$  — заданная матрица  $r(t) > 0$  — скалярная функция, характеризующая помехи. При этом удовлетворяется требование  $r(t) \leq r_0$ , где  $r_0$  — заданное число.

Предполагается система, состоящая из  $J$  подсистем с номерами  $j = 1, 2, \dots, J$ , каждая из которых описывается стохастическими уравнениями (3.1) и при этом выполняется (3.2). Рассматривается указанная задача об оптимизации помех, причем генерация помех осуществляется централизованно, что характеризуется следующим условием:

$$\sum_{j=1}^J r_j(t) \leq r_0, \quad (3.3)$$

где  $r_j(t)$  — управляющая функция помех, соответствующая  $j$ -й подсистеме.

Неравенство (3.3) можно рассматривать как связывающие ограничения для детерминированной задачи, которая задается уравнениями (3.2) при всех фиксированных  $j = 1, 2, \dots, J$  с невыписанным пока функционалом. Эта задача представляет собой динамическую задачу оптимального управления, где роль фазовых координат играют компоненты ковариационных матриц  $D_j(t)$ , а управляющими функциями являются  $r_j(t)$ . Специфика полученной задачи указывает на целесообразность решения по методу двухуровневой оптимизации. Один из таких методов, применимых для динамических задач оптимального управления, — это метод итеративного агрегирования. Эффективность его применения выясняется на примере задачи (3.1) с одномерными уравнениями вида

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = a_j x_j(t) + b_j(t), \quad x_j(0) = x_{j0},$$

$$y_j(t) = x_j(t) + \xi_j(t),$$

где корреляционная функция гауссовского белого шума  $\xi_j(t)$  обозначается через  $r_j(t) \delta(t-s)$ .

В этом случае уравнения (3.3) для дисперсий имеют вид

$$\frac{dD_j(t)}{dt} = 2a_j D_j(t) - D_j^2(1/r_j(t)), \quad D_j(0) = D_{j0}. \quad (3.4)$$

Будем предполагать, что выигрыш системы пропорционален взвешенной сумме квадратов дисперсий подсистем в конечный момент времени

$$f = \sum_{i=1}^J \gamma_i D_i^2(T) \rightarrow \max,$$

где  $\gamma_i$  — заданные положительные числа.

Делая замену переменных  $z(t) = D^{-1}(t)$ , приходим к следующей эквивалентной задаче оптимального управления:

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = -2a_j z_j(t) + \frac{1}{r_j(t)}, \quad z_j(0) = z_{j0} = D_{j0}^{-1}, \quad (3.5)$$

$$r_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^J r_i(t) \leq r_0, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^J \omega_i z_i^2(T) \rightarrow \min. \quad (3.7)$$

Здесь  $\omega_i$  — заданные положительные числа.

Вначале рассмотрим прямое решение задачи (3.5) — (3.7) с использованием принципа максимума Понтрягина [91]. Сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = 2a_j p_j(t), \quad (3.8)$$

$$p_j(T) = -2\omega_j z_j(T), \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$p_j(t) = -2\omega_j z_j(T) \exp(2a_j(t-T)), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.9)$$

и содержит пока неизвестные параметры  $z_j(T)$ .

Согласно принципу максимума Понтрягина, для нахождения оптимальных управлений приходим к следующей задаче:

$$\sum_{j=1}^J \frac{p_j(t)}{r_j(t)} \rightarrow \max, \quad (3.10)$$

$$r_j(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad \sum_{j=1}^J r_j(t) \leq r_0,$$

где функционал в (3.10) представляет собой гамильтониан задачи (3.5) — (3.7).

Решим задачу (3.10). Она заключается в максимизации функционала на положительном ортанте переменных  $r_j$ , ограниченном гиперплоскостью. Максимум функционала не может достигаться ни при каком  $r_s = 0$ ,  $s = 1, 2, \dots, J$ , так как в этом случае функционал равен минус бесконечности, поскольку все  $p_j(t) < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ .

Максимум функционала не достигается ни в какой внутренней точке рассматриваемой области, так как частные производные функционала по  $r_j(t)$  не равняются нулю. Таким образом, экстремальная точка принадлежит плоскости  $\sum_{j=1}^J r_j = r_0$ . Для ее нахождения введем неопределенный множитель Лагранжа  $\lambda$  и рассмотрим задачу безусловной максимизации

$$\sum_{j=1}^J p_j/r_j + \left[ r_0 - \sum_{j=1}^J r_j \right] \lambda \rightarrow \max.$$

Приравнивая частные производные по  $r_j$  нулю, имеем  $-\frac{p_j}{r_j^2} - \lambda = 0$ ,

откуда  $r_j = \sqrt{-p_j/\lambda}$ , а также

$$r_0 = \left( \sum_{j=1}^J \sqrt{-p_j} \right) / \sqrt{\lambda}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = r_0 \left( \sum_{j=1}^J \sqrt{-p_j} \right)^{-1}.$$

Окончательно получаем

$$r_j = r_0 \sqrt{-p_j} \left( \sum_{j=1}^J \sqrt{-p_j} \right)^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.11)$$

Оптимальные управления, выраженные согласно (3.11), подставим в правые части дифференциальных уравнений (3.5). Учтем зависимость (3.9). Придем к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = -2a_j z_j(t) + \frac{1}{r_0} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^J \sqrt{2\omega_s z_s(T)} \exp(a_j(t-T)),$$

$$z_j(0) = z_{j0},$$

решение которых записывается в виде

$$z_j(t) = z_{j0} \exp(-2a_j t) + \frac{1}{r_0} \exp(-2a_j t) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^J \{[\exp(a_s + 2a_j)t - 1] \times \\ \times \exp(-a_s T) \sqrt{2\omega_s z_s(T)} (a_s + 2a_j)^{-1}\}, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Полагая в этом выражении  $t = T$ , получаем систему нелинейных уравнений относительно неизвестных  $z_j(T)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Анализ системы весьма непросто даже в случае  $j = 2$ , и он существенно усложняется с ростом  $J$ , т. е. с увеличением количества подсистем в рассматриваемой системе.

Далее изучим решение задачи (3.5) — (3.7) посредством декомпозиционного алгоритма. Введем агрегированное управление

$$R(t) = \sum_{j=1}^J r_j(t)$$

и весовые функции агрегирования  $\alpha_j(t) = r_j(t)/R(t)$ , которые удовлетворяют очевидным условиям

$$\alpha_j(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad \sum_{j=1}^J \alpha_j(t) = 1. \quad (3.12)$$



При фиксированных весах  $\alpha_j(t)$ , удовлетворяющих условию (3.12), имеем координирующую задачу с макроуправлениями, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_j(t)}{dt} &= -2a_j z_j(t) + \frac{1}{(\alpha_j(t) R(t))}, \quad z_j(0) = z_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ 0 &\leq R(t) \leq r_0, \\ \sum_{j=1}^J \omega_j z_j^2(T) &\rightarrow \max. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Применение принципа максимума Понтрягина для агрегированной задачи дает решение  $R(t) = r_0$ . В дальнейшем нам понадобится сопряженная функция  $\mu(t)$ , соответствующая условию  $R(t) \leq r_0$  агрегированной задачи. Эта функция определяется из равенства

$$\mu(t) = - \sum_{i=1}^J p_i(t) / (\alpha_i(t) R^2(t)) = - \frac{1}{r_0^2} \sum_{i=1}^J p_i(t) / \alpha_i(t),$$

где сопряженные функции  $p_j(t)$  удовлетворяют уравнениям (3.8), а в качестве условия на конце отрезка  $t = T$  необходимо взять  $p_j(T) = 2\omega_j z_j(T)$ , где величины  $z_j(T)$  определяются после решений дифференциальных уравнений в агрегированной задаче (3.13) при известном оптимальном управлении  $R(t) = r_0$ .

На каждом шаге итеративного алгоритма решаются также следующие независимые локальные задачи для подсистем:

$$\begin{aligned} \frac{dz_j(t)}{dt} &= -2a_j z_j(t) + \frac{1}{r_j(t)}, \quad z_j(0) = z_{j0}, \quad r_j \geq 0, \\ -\omega_j z_j^2(T) - \int_0^T \mu(t) r_j(t) dt &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Сопряженные функции  $p_j(t)$  для этих задач вычисляются по формуле (3.9). Применение принципа максимума Понтрягина для этих задач приводит к локализации функций вида

$$\frac{p_j(t)}{r_j(t)} - \mu(t) r_j(t) \rightarrow \max, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Оптимальные решения локальных задач имеют вид

$$r_j(t) = \sqrt{-p_j(t) / \mu(t)}, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Подставляя в правые части этих соотношений сопряженные функции  $p_j(t)$ , выраженные согласно (3.9), получаем дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = -2a_j z_j(t) \exp(-a_j(t-T)) \sqrt{\mu(t)} (2\omega_j)^{-\frac{1}{2}} / \sqrt{z_j(T)}.$$

Решая задачи Коши для выписанных уравнений при условиях  $z_j(0) = z_{j0}$  и вычисляя полученную квадратуру при  $t = T$ , получаем

уравнение относительно неизвестных  $z_i(T)$  вида

$$z_i(T) = z_{i0} \exp(-2a_i T) + \psi_i(T) (2\omega_j)^{-\frac{1}{2}} / \sqrt{z_j(T)}, \quad (3.14)$$

где функции  $\psi_i(T)$  имеют вид

$$\psi_i(T) = \exp(-a_i T) \int_0^T \sqrt{\mu(t)} e^{a_i t} dt.$$

Уравнение вида (4.14) сводится к кубическому уравнению относительно  $\sqrt{z_j(T)}$  и легко исследуется по стандартной схеме. Тем самым устанавливается эффективность применения итеративного декомпозиционного алгоритма для задачи (3.5) — (3.7) по сравнению с прямым решением указанной задачи. Причем эта эффективность становится очевидной с увеличением значения  $J$ .

#### § 4. Декомпозиция динамических задач управления в условиях неопределенности

В данном параграфе метод разложения на основе агрегирования переменных применяется для динамических оптимизационных задач в условиях неопределенности типа изучаемых в работе [71]. Предполагается, что неопределенность заключается в неполной информации на начальные данные и входные возмущения системы. Приводятся построения методов разложения для изучаемого класса задач. Выводится критерий оптимальности промежуточного решения, устанавливается монотонность по функционалу итеративного процесса. Подробно рассматривается модельная задача, на которой иллюстрируются все конструкции декомпозиционного алгоритма.

**1. Постановка задачи и основные построения.** Рассматривается динамическая система, состоящая из  $J$  подсистем с номерами  $j = 1, 2, \dots, J$ . Каждая из подсистем при фиксированном индексе  $j$  на промежутке времени  $T_\theta = \{t : t_0 \leq t \leq \theta\}$  задается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = A_j(t)x_j(t) + B_j(t)u_j(t) + C_j(t)v_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (4.1)$$

где непрерывные матрицы  $A_j(t)$ ,  $B_j(t)$ ,  $C_j(t)$  имеют размерности соответственно  $N_j \times N_j$ ,  $N_j \times I$ ,  $N_j \times S_j$ .

Пусть в евклидовых пространствах  $E^{N_j}$  и  $E^{S_j}$  заданы выпуклые компактные множества  $X_j^0$  и  $\Omega_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , которые задают ограничения на начальные данные и входные функции

$$x_j(t_0) = x_j^0 \in X_j^0, \quad v_j(t) \in \Omega_j(t), \quad j = 1, \dots, J. \quad (4.2)$$

Здесь предполагается непрерывное изменение множества  $\Omega_j(t)$  при  $t \in T_\theta$ .

Пусть некоторому фиксированному набору  $u_j(\cdot) = u_j(t)$ ,  $v_j(\cdot) = v_j(t)$  соответствует единственное решение дифференциальных уравнений (4.1), которое обозначим через  $x_j(t, u_j(\cdot), v_j(\cdot), x_j^0)$ . Так же,

как в работе [71], вводится понятие ансамбля траекторий

$$X_j(t, u_j(\cdot)) = \{u x_j(t, u_j(\cdot), v_j(\cdot), x_j^0) \mid v(t) \in \Omega_j(t), t \in T_0, x_j^0 \in X_j^0\}.$$

На управляющие функции наложим два вида ограничений: локальные для подсистем

$$u_j(t) \geq 0, \quad Q_j(t) u_j(t) \leq q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (4.3)$$

и общие связывающие для всей системы

$$\sum_{j=1}^J D_j u_j(t) \leq d(t), \quad (4.4)$$

где  $Q_j(t)$  и  $D_j(t)$  — непрерывные матрицы размерности  $[K_j \times I]$  и  $[M \times I]$ , а  $g_j(t)$  и  $d(t)$  — непрерывные векторы с количествами компонент  $K_j$  и  $M$ . Предполагается, что при  $t \in T_0$  неравенства (4.3) при каждом фиксированном  $j = 1, 2, \dots, J$  задают ограниченные многогранники  $p_j(t)$  в пространстве  $E^I$ , а все неравенства (4.3) вместе задают ограниченный многогранник  $P(t)$  в  $J$ -й степени пространств  $E^I$ .

Вводятся матрицы  $R_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , размерностей  $M_j \times N_j$ , которые отображают концы траекторий  $x_j(t, u_j(\cdot), v_j(\cdot), x_j^0)$  на множестве  $z_j(t, u_j(\cdot))$  евклидовых пространств  $E^{M_j}$ . Иными словами,

$$\begin{aligned} Z_j(t, u_j(\cdot)) &= R_j(t) X_j(t, u_j(\cdot)) = \\ &= \{z_j : z_j = R_j(t) x_j(t, u_j(\cdot), v_j(\cdot), x_j^0) \mid v_j(\cdot) \in \Omega_j(t), t \in T_0, x_j^0 \in X_j^0\}. \end{aligned}$$

Рассматриваются выпуклые конечные функции  $\varphi_j(z_j) \in C^2$  при  $z_j \in E^{M_j}$ , а также функционал вида

$$f(u(\cdot)) = \sum_{j=1}^J \int_{z_j(0, u_j(\cdot))} \varphi_j(z_j) dz_j. \quad (4.5)$$

Ставится следующая задача оптимального управления: среди измеримых функций  $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_J(\cdot)\}$ , удовлетворяющих ограничениям (4.3), (4.4), найти такую  $\bar{u}(\cdot)$ , для которой

$$\bar{f} = f(\bar{u}(\cdot)) = \min \{f(u(\cdot)) \mid u(\cdot) \in P(t), t \in T_0\}. \quad (4.6)$$

Согласно общей теории [71, 122] решение задачи (4.1) — (4.6) осуществляется следующим образом. Пусть  $l_j(\cdot) = l_j(p_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , измеримые  $M_j$ -мерные вектор-функции, а  $\psi_j(t, l_j)$  — решения систем уравнений

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\psi_j A_j(t), \quad \psi_j(0) = l_j R_j(0), \quad t \leq 0. \quad (4.7)$$

Введем обозначение

$$z_j = z_j(\theta, 0) = R_j(\theta) X_j(\theta, 0)$$

и рассмотрим функции

$$\varphi_j^*(l_j) = \sup \{(l_j, z_j) - \varphi_j(z_j) \mid z_j \in E^{M_j}\}, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

которые являются сопряженными в смысле Фенхеля к  $\varphi_j(z_j)$ .

Вводится лагранжиан вида

$$L(l(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{i=1}^J \int_{t_0}^{\theta} \int_{z_j} \{ \psi_j(t, l_j(p_j)) B_j(t) u_i(t) + \\ + (l_j(p_j)) p_j - \varphi_j^*(l_j(p_j)) \} dt dp_j.$$

Далее, рассматриваются последовательные задачи

$$f^* = \sup \{ \omega(l(\cdot)) \mid l_j(p_j), \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ \omega(l(\cdot)) = \min \{ L(l(\cdot), u(\cdot)) \mid u(t) \in P(t), t \in T_0 \}, \quad (4.8)$$

где верхняя грань в (4.8) берется по всем измеримым функциям

$$l_j(p_j) \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Пусть  $\bar{l}(\cdot)$  — решение задачи (4.8), тогда оптимальное управление  $\bar{u}(\cdot)$  удовлетворяет следующему условию минимума:

$$\sum_{i=1}^J \int_{t_0}^{\theta} \int_{z_j} s_j(t, \bar{l}_j(p_j)) B_j(t) \bar{u}_j(t) dt dp_j = \\ = \min \left\{ \sum_{i=1}^J \int_{t_0}^{\theta} \int_{z_j} s_j(t, \bar{l}_j(p_j)) B_j(t) u_i(t) dt dp_j \mid u(t) \in P(t) \right\}, \quad (4.9)$$

при этом  $\bar{f} = f^*$ .

Алгоритм декомпозиции в применении к задаче (4.1) — (4.6) состоит из следующих действий. Сначала вводятся агрегированные управления

$$U^t(t) = \sum_{i=1}^J u_i^t(t),$$

а также весовые функции агрегирования  $\alpha_j^t(t) = u_j^t(t)/U^t(t)$ , которые удовлетворяют условиям

$$\alpha_j^t(t) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^J \alpha_k^t(t) \leq 1. \quad (4.10)$$

Фиксируя некоторые веса, удовлетворяющие (4.10), и подставляя  $u_j^t(t) = \alpha_j^t(t) V^t(t)$  в (4.1), (4.3), (4.4), получаем задачу с агрегированными управлениями (макрозадачу). Функционал макрозадачи имеет такой же вид, как (4.5), а множества ограничений на управления  $V^t(t)$  задаются преобразованными неравенствами, которые получаются из (4.3), (4.4) при постоянных весах  $\alpha_j^t(t)$ . Агрегированная задача содержит  $I$  неизвестных управлений, в то время как в исходной задаче (4.3) — (4.6) это число равняется  $I \times J$ . Макрозадача решается по ранее указанной схеме.

Пусть для некоторых фиксированных весов  $\alpha_j^t(t)$ , удовлетворяющих условиям (4.10), получено оптимальное решение  $V^0(t) > 0$  агрегированной задачи, а  $g$  — оптимальное значение ее функционала.

Пусть  $\delta^0(t) < 0$  —  $M$ -мерная вектор-функция оптимальных двойственных переменных, соответствующих преобразованному связывающим ограничениям (4.4) агрегированной задачи.

Формируются локальные задачи для подсистем, которые при каждом фиксированном  $j = 1, 2, \dots, J$  задаются ограничениями (4.1) — (4.3), а функционалы имеют вид

$$h_j = \int_{z_j(\theta, u_j(\cdot))} \varphi_j(z_j) dz_j - \int_{t_0}^{\theta} \delta^0(t) D_j(t) u_j(t) dt \rightarrow \min.$$

Решение локальных задач осуществляется по ранее описанной схеме, где лагранжиан имеет вид

$$L_j(l_j(\cdot), u_j(\cdot)) = \int_{t_0}^{\theta} \int_{z_j} \{[\psi_j(t, l_j(p_j)) B_j(t) - \delta^0(t) D_j(t)] u_j(t) + \\ + (l_j(p_j), p_j) - \varphi_j^*(l_j(p_j))\} dt dp_j,$$

а минимизация по управлениям осуществляется на множествах  $p_j(t)$ .

Пусть  $\hat{u}_j(t)$  — оптимальные управления локальных задач, а  $\hat{h}_j$  — оптимальные значения функционалов этих задач. Тогда, согласно схеме, берутся новые веса агрегирования по формуле

$$\alpha_j^i(t, \rho_j) = [u_j^{i0}(t) + \rho_j(\hat{u}_j^i(t) - u_j^{i0}(t))] \times \\ \times \left[ \sum_{i=1}^J (u_j^{i0}(t) + \rho_j(\hat{u}_j^i(t) - u_j^{i0}(t))) \right]^{-1}, \quad (4.11)$$

где  $u_j^{i0}(t) = \alpha_j^i(t) U^{i0}(1)$  — дезагрегированные управления, а  $\rho_j$  — вещественные параметры. Фиксируя веса согласно (4.11), получаем агрегированную задачу с оптимальным значением функционала  $g$ , являющимся функцией параметров  $\rho_j$ . Ставится задача

$$g^0(\rho_j) \rightarrow \min \quad (4.12)$$

при  $\rho_j \in [0, 1]$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Если  $\rho_j$  — решение этой задачи, то веса для следующего шага итеративного процесса вычисляются по формуле (4.11), куда вместо  $\rho_j$  подставляются  $\rho_j$ .

**2. Условие оптимальности и монотонность по функционалу.** С помощью алгоритма строится последовательность дезагрегированных управлений  $u_j^0(t) = \alpha_j(t) U^0(t)$ , допустимых к исходной задаче (4.1) — (4.6) со значениями функционалов  $f$ , равными  $g$ . Следующее утверждение устанавливает критерий оптимальности решения  $u_j^0(t)$  для задачи (4.1) — (4.6) (условие окончания итераций).

**Теорема 4.1.** Достаточным условием оптимальности решения  $u_j^0(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , для исходной задачи (4.1) — (4.6) является

выполнение равенства

$$\sum_{j=1}^J \hat{h}_j + \int_{t_0}^{\theta} (\delta^0(t), d(t)) dt - g^0 = 0. \quad (4.13)$$

Если решение  $u_j^0(t)$  неоптимально для задачи (4.1) — (4.6), то левая часть (4.13) строго меньше нуля.

Доказательство теоремы (4.1) проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения, приведенного в работе [119].

Следующая теорема показывает, что значения функционалов  $f$ , соответствующих допустимым решениям  $u_j^0(t)$ , уменьшаются в итерационном процессе.

**Теорема 4.2.** Пусть  $u_j^0(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , — неоптимальное управление для задачи (5.1) — (5.6), которое соответствует некоторому шагу итеративного процесса, или, что то же, некоторым весам  $\alpha_j(t)$ , удовлетворяющим (4.10). Тогда с помощью алгоритма строится другое допустимое управление со значением функционала, строго меньшим, чем соответствующее значение для управления  $u_j^0(t)$ .

Доказательство теоремы 4.2 проводится так же, как и аналогичной теоремы в работе [119]. Оно является следствием для мартингалного значения  $\frac{\partial g^0(0)}{\partial \rho}$  агрегированных параметрических задач при  $\rho_j = \rho$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Формула  $\frac{\partial g^0(0)}{\partial \rho}$  в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial g^0(0)}{\partial \rho} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3,$$

где  $\pi_1 < 0$  — левая часть (4.13); далее имеем

$$\pi_2 = \sum_{j=1}^J \int_{z_j(\theta, u_j^0(\cdot))} \left[ \varphi_j(z_j) - \sum_{m=1}^{M_j} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_j^m} \right) (\hat{z}_j^m - z_j^m) - \varphi_j(\hat{z}_j) \right] dz_j,$$

где  $\hat{z}_j \in E^{M_j}$ , причем  $\pi_2 \leq 0$  вследствие предполагаемой выпуклости функций  $\varphi_j(z_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ ; наконец, для величины  $\pi_3$  имеем

$$\pi_3 = \sum_{j=1}^J \int_{t_0}^{\theta} [(q(t) - Q_j(t) \hat{u}_j(t)) \eta_j^0(t)] dt,$$

где  $\eta_j^0(t) \leq 0$  — оптимальные двойственные переменные агрегированной задачи, соответствующие преобразованным неравенствам (4.3), поэтому согласно (4.3) справедливо неравенство  $\pi_3 \leq 0$ . Окончательно получаем  $g(\rho) < g(0)$  в некоторой окрестности точки  $\rho = 0$ , что и доказывает теорему 4.2.

Следствием этой теоремы решается вопрос о сходимости итеративного метода.

**3. Модельная задача.** В предлагаемом примере все промежуточные задачи метода декомпозиции имеют аналитическое решение. Рас-

смотрим задачу

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = u_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0 \in X_1^0 = [-a_1, a_1], \quad a_1 - \text{const} > 0, \quad (4.14)$$

$$0 \leq u_1(t) \leq w_1,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = u_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0 \in X_2^0 = [-a_2, a_2], \quad a_2 - \text{const} > 0, \quad (4.15)$$

$$0 \leq u_2(t) \leq w_2,$$

$$u_1(t) + u_2(t) \leq v, \quad (4.16)$$

$$f = \int_{z_1(\theta, u_1(\cdot))} 0,5(z_1 - m_1)^2 dz_1 + \int_{z_2(\theta, u_2(\cdot))} 0,5(z_2 - m_2)^2 dz_2 \rightarrow \min. \quad (4.17)$$

Здесь  $J = 2$ , матрицы  $R_j(t)$  превращаются в скалярные величины и равны единице,  $x_j(t)$ ,  $u_j(t)$  — одномерные функции. Условия (4.14), (4.15) задают связи для подсистем, неравенство (4.16) является связывающим ограничением. Множества  $X_1^0$ ,  $X_2^0$ , в которых изменяются неопределенные начальные условия, представляют собой отрезки с серединами в начале координат. Квадратичные функции  $\varphi_1(z_1)$  и  $\varphi_2(z_2)$  характеризуют расстояния до заданных точек  $m_1$  и  $m_2$ .

Предположим, что постоянные  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $v$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  удовлетворяют для определенности следующим условиям:

$$\begin{aligned} m_1 > m_2 > 0, \quad m_1 - m_2 > v\theta, \quad w_1 > v, \quad v > 0, \\ m_2 > v\theta, \quad (w_1 - v)\theta > m_1 - m_2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Вначале получим прямое решение задачи (4.14) — (4.17). Отметим, что уравнения типа (4.7) имеют вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = 0, \quad \psi_i(\theta) = l_i, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \quad \psi_2(\theta) = l_2.$$

поэтому

$$\psi_1(t) = l_1, \quad \psi_2(t) = l_2, \quad t \in T_\theta.$$

Специфика функций  $\varphi_1(z_1)$ ,  $\varphi_2(z_2)$  порождает с учетом [71] лагранжиан задачи (4.14) — (4.17) следующего вида:

$$L(l_1, l_2, u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_0^\theta (l_1 u_1 + l_2 u_2) dt - m_1 l_1 - 0,5 l_1^2 - m_2 l_2 - 0,5 l_2^2.$$

Согласно описанной выше процедуре решения задачи, необходимо сначала выяснить вид функции

$$\omega_1(l_1, l_2) = \min \left\{ \int_0^\theta (l_1 u_1 + l_2 u_2) dt \mid u_1 + u_2 \leq v, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \right\}.$$

Здесь опускаются условия  $u_1 \leq w_1$  и  $u_2 \leq w_2$  вследствие третьих неравенств (4.18). Функция  $\omega_1(l_1, l_2)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_1(l_1, l_2) &= 0 \quad \text{при } l_1, l_2 > 0, \\ \omega_1(l_1, l_2) &= v l_1 \quad \text{при } l_1 < 0, \quad l_2 < l_1, \\ \omega_1(l_1, l_2) &= v l_2 \quad \text{при } l_1 < 0, \quad l_1 < l_2. \end{aligned}$$

Очевидно, функция  $\omega_1(l_1, l_2)$  является вогнутой. После определения функции  $\omega_1(l_1, l_2)$  согласно (4.8) необходимо найти максимум вогнутой функции:

$$\omega(l_1, l_2) = \omega_1(l_1, l_2) - m_1 l_1 - 0,5 l_1^2 - m_2 l_2 - 0,5 l_2^2.$$

Учитывая первое и четвертое неравенства в (4.18), имеем экстремальную точку

$$\bar{l}_1 = (v\theta - m_1), \quad \bar{l}_2 = -m_2.$$

Далее, оптимальное управление, постоянное на отрезке, находят из условия минимума (4.9), которое приводит к задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} (v\theta - m_1)u_1 - m_2 u_2 &\rightarrow \min, \\ u_1 + u_2 &\leq v, \\ u_1 &\geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Оптимальное решение этой задачи в результате второго неравенства (4.18) будет:  $\bar{u}_1 = v$ ,  $\bar{u}_2 = 0$ . Наконец, оптимальное значение функционала  $\bar{f}$  задачи (4.14) — (4.17) получается как  $L(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))$ :  $\bar{f} = 0,5(m_1 - v\theta)^2 + 0,5 m_2^2$ .

Далее будем решать задачу (4.14) — (4.17) итеративным методом разложения. Для этого сначала задаемся постоянными на отрезке  $T_\theta$  весами  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ , такими, что  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Агрегированная задача с функционалом (4.17) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \alpha_1 U(t), \quad x_1(0) = x_1^0 \in X_1^0, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \alpha_2 U(t), \quad x_2(0) = x_2^0 \in X_2^0, \quad 0 \leq U(t) \leq v, \end{aligned}$$

где множества  $z_1$  и  $z_2$  зависят уже от  $V(\cdot)$ . Лагранжиан агрегированной задачи записывается так:

$$L^0(l_1, l_2, U) = \int_0^\theta (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) U dt - m_1 l_1 - 0,5 l_1^2 - m_2 l_2 - 0,5 l_2^2.$$

Функция

$$\omega_1^0(l_1, l_2) = \min \left\{ \int_0^\theta (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) U dt \mid 0 \leq U \leq v \right\}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1^0(l_1, l_2) &= 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \geq 0, \\ \omega_1^0(l_1, l_2) &= (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) v\theta \quad \text{при} \quad \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 < 0. \end{aligned}$$

Из максимизации вогнутой функции

$$\omega^0(l_1, l_2) = \omega_1^0(l_1, l_2) - m_1 l_1 - 0,5 l_1^2 - m_2 l_2 - 0,5 l_2^2$$

с учетом первых двух неравенств (4.18) следует экстремальная точка  $\bar{l}_1^0 = \alpha_1 v\theta - m_1$ ,  $\bar{l}_2^0 = \alpha_2 v\theta - m_2$ . Оптимальное управление агрегиро-



ванной задачи на основании условия минимума (4.9) будет:  $U^0(t) = v$ . Оптимальное значение  $g$  функционала агрегированной задачи получается как  $L^0(\bar{l}_1^0, \bar{l}_2^0, U^0)$ :

$$g^0 = 0,5(m_1 - \alpha_1 v \theta)^2 + 0,5(m_2 - \alpha_2 v \theta)^2. \quad (4.19)$$

Сопряженная функция  $\delta^0(t)$ , соответствующая условию  $U(t) < v$ , вычисляется в виде

$$\delta^0(t) = \alpha_1 \psi_1(\bar{l}_1^0) + \alpha_2 \psi_2(\bar{l}_2^0) = \alpha_1(\alpha_1 v \theta - m_1) + \alpha_2(\alpha_2 v \theta - m_2).$$

Рассмотрим первую локальную задачу

$$h_1 = \int_{z_1(\theta, u_1(\cdot))}^{\theta} 0,5(z_1 - m_1)^2 dz_1 - \int_0^{\theta} u_1 \delta^0 dt \rightarrow \min$$

при условиях

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = u_1, \quad x_1^0 \in X_1, \quad 0 \leq u_1(t) \leq w_1.$$

Для решения этой задачи по указанной схеме необходимо сначала выяснить вид функции

$$\hat{\omega}_1^1(l_1) = \min \left\{ \int_0^{\theta} (l_1 - \delta^0) u_1 dt \mid 0 \leq u_1 \leq w_1 \right\}.$$

Имеем

$$\hat{\omega}_1^1(l_1) = 0 \quad \text{при } l_1 \geq \delta^0,$$

$$\hat{\omega}_1^1(l_1) = w_1 l_1 \quad \text{при } l_1 < \delta^0.$$

Далее максимизируем по  $l_1$  функцию

$$\hat{\omega}^1(l_1) = \hat{\omega}_1^1(l_1) - l_1 m_1 - 0,5 l_1^2.$$

Функция  $\hat{\omega}^1(l_1)$  представляет собой сумму кусочно-линейной функции  $\hat{\omega}_1^1(l_1)$  с точкой излома  $l_1 = \delta^0$  и квадратичной функции  $\chi_1(l_1) = -l_1 m_1 - 0,5 l_1^2$ . Покажем сначала, что координата точки излома функции  $\hat{\omega}_1^1(l_1)$  больше, чем координата точки максимума функции  $\chi_1(l_1)$ . Действительно, неравенство  $\delta^0 > -m_1$  эквивалентно следующему:

$$\alpha_2(m_1 - m_2) > -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) v \theta,$$

которое всегда выполняется вследствие первого условия (4.18). Существует две возможности: максимум функции  $\hat{\omega}^1(l_1)$  достигается либо в точке  $l_1 = \delta^0$ , либо в стационарной точке  $\tilde{l}_1$  функции  $\mu(l_1) = w_1 \theta l_1 - m_1 l_1 - 0,5 l_1^2$  при условии  $\tilde{l}_1 < \delta^0$ . Исследуем вторую

возможность. В этом случае должно выполняться неравенство

$$\tilde{l}_1 = (w_1\theta - m_1) < \alpha_1(\alpha_1 v\theta - m_1) + \alpha_2(\alpha_2 v\theta - m_2) = \overset{0}{\delta},$$

которое эквивалентно следующему:

$$w_1\theta - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)v\theta < (m_1 - m_2)\alpha_2.$$

Это неравенство, квадратичное по  $\alpha_2$  при  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ , не выполняется в точке  $\alpha_2 = 0$  вследствие третьего условия (4.18). Оно не выполняется также в точке  $\alpha_2 = 1$ , на основании пятого условия (4.18). То же, очевидно, наблюдается при всех  $\alpha_2 \in [0, 1]$ . Таким образом, экстремальная точка  $\tilde{l}_1$  функции  $\hat{\omega}^1(l_1)$  имеет координату  $\overset{0}{\delta}$ , а из условия минимума (4.9) для лагранжиана первой локальной задачи вытекает решение:  $\hat{u}_1(t)$  равняется любой константе  $\tilde{w}_1$ , принадлежащей отрезку  $[0, w_1]$ . Для оптимального значения функционала  $\hat{h}_1$  первой локальной задачи получаем формулу

$$\hat{h}_1 = -m_1\overset{0}{\delta} - 0,5(\overset{0}{\delta})^2. \quad (4.20)$$

Рассмотрим вторую задачу

$$h_2 = \int_{z_2(\theta, u_2(\cdot))} (z_2 - m_2) dz_2 - \int_0^T \delta u_2 dt \rightarrow \min$$

при условиях

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = u_2, \quad x_2^0 \in X_2, \quad 0 \leq u_2(t) \leq w_2.$$

Так же, как в первой локальной задаче, получаем функцию  $\hat{\omega}_1^2(l_2)$ , которая имеет вид

$$\hat{\omega}_1^2(l_2) = 0 \quad \text{при } l_2 \geq \overset{0}{\delta},$$

$$\hat{\omega}_1^2(l_2) = w_2 l_2 \quad \text{при } l_2 < \overset{0}{\delta}.$$

Взаимное расположение точки излома этой функции, точки максимума функции  $\chi_2(l_2) = -l_2 m_2 - 0,5 l_2^2$  зависит уже от параметра  $\alpha_1$ . Будем предполагать для определенности, что начальный весовой множитель  $\alpha_1$  принадлежит отрезку  $[\tilde{\alpha}_1, 1]$ , где

$$\tilde{\alpha}_1 = 0,5 [1 + (m_1 - m_2)/2v\theta] - \sqrt{[(m_1 - m_2)v\theta + (m_1 - m_2)^2/4(v\theta)^2]}.$$

В таком случае легко убедиться, что выполняется неравенство

$$\overset{0}{\delta} < -m_2,$$

и максимум функции  $\hat{\omega}^2(l_2) = \hat{\omega}_1^2(l_2) - m_2 l_2 - 0,5 l_2^2$  достигается в  $l_2 = -m_2$ . Из условия минимума (4.9) следует оптимальное управление второй локальной задачи, а оптимальное значение функционала

$$\hat{h}_2 = 0,5 m_2^2. \quad (4.21)$$

Далее вычислим новые веса агрегирования в соответствии с формулой (4.11). Полагая  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , имеем

$$\alpha_1(\rho) = [\alpha_1 v + \rho(\tilde{w}_1 - \alpha_1 v)] \times [v + \rho(\tilde{w}_1 - \alpha_1 v) - \rho \alpha_2 v]^{-1},$$

$$\alpha_2(\rho) = [\alpha_2 v - \rho \alpha_2 v] \times [v + \rho(\tilde{w}_1 - \alpha_1 v) - \rho \alpha_2 v]^{-1}.$$

Подставляя эти веса в формулу (4.19), получаем функцию  $g^0(\rho)$ . Рассмотрим задачу

$$g^0(\rho) \rightarrow \min, \quad \rho \in [0, 1].$$

Для ее решения вычислим производную  $dg^0(\rho)/d\rho$ :

$$\frac{dg^0(\rho)}{d\rho} = -0,5v^2\theta\alpha_2w_1[(1-\rho)v + \rho w_1]^2[(m_1 - \alpha_1(\rho)v\theta) - (m_2 - \alpha_2(\rho)v\theta)].$$

При  $\rho = 0$  имеем  $dg^0(\rho)/d\rho < 0$ , что согласуется с теоремой 4.2. Будем искать точку, в которой эта производная равна нулю. Имеем уравнение

$$m_1 - \alpha_1 v \theta = m_2 - \alpha_2 v \theta,$$

откуда получаем  $\alpha_1 = 0,5(m_1 - m_2)/v\theta + 0,5$ . Таким образом,  $\alpha_1 > 1$  вследствие второго неравенства (4.18). Поэтому функция  $g^0(\rho)$  монотонно убывает на отрезке  $[0, 1]$ , и ее минимум достигается в точке  $\rho = 1$ . В этой точке имеем

$$\alpha_1(1) = 1, \quad \alpha_2(1) = 0, \quad u_1^0 = v, \quad u_2^0 = 0, \quad g^0 = 0,5(m_1 - v\theta)^2 + 0,5m_2^2,$$

что соответствует оптимальному решению исходной задачи (4.14) — (4.17), которое получено за одну итерацию. Наконец, проверим выполнение достаточного условия оптимальности (4.13). С учетом (4.19), (4.20), (4.21) имеем

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \int_2^{\theta} (v\theta - m_1) v dt - g^0 = \\ &= -m_1(v\theta - m_1) - 0,5(v\theta - m_1)^2 + 0,5m_2^2 - (v\theta - m_1)v\theta - \\ &\quad - 0,5(m_1 - v\theta)^2 - 0,5m_2^2 = 0, \end{aligned}$$

что согласуется с утверждением теоремы 4.1.

Следует отметить, что итеративный метод декомпозиции на основе введения макропеременных в работах В. И. Цуркова и Ю. А. Белова [15, 120, 121, и др.] развит также для широкого класса детерминированных и стохастических задач управления, которые описываются системами уравнений в частных производных. В этих работах выведены критерии оптимальности промежуточных решений. Установлена монотонность по функционалу итеративного процесса. Приведены конкретные физические задачи, на которых интерпретируются построения метода и выясняется его эффективность.

## § 5. Декомпозиция в задачах проектирования сложных систем

Процесс проектирования и создания сложной технической системы многоэтапный. При этом достаточно трудоемким и длительным является этап проектирования, который в свою очередь традиционно делится на такие крупные этапы, как внешнее и внутреннее проектирование.

На этапе внешнего проектирования основная проблема состоит в конкретизации целей и задач, которые должен решать объект в процессе своего функционирования, и представление требований к основным его характеристикам и качествам, обеспечивающим достижение этих целей. Задачей внутреннего проектирования является реализация в виде комплекса технических устройств, узлов и агрегатов, представляющих сам объект в целом, значений основных конструктивных параметров, придающих объекту требуемые качества.

Согласование требований представителей внешнего проектирования с возможностями представителей внутреннего проектирования, как правило, называют этапом разработки технического предложения. На этом этапе формируется облик будущего объекта и проводится предварительная оценка его эффективности. Возникающие при этом проблемы разрешаются в диалоге представителей внешнего проектирования с представителями внутреннего проектирования на этапе, который следуя работе [66] в настоящее время принято называть этапом формирования облика проектируемого объекта.

В данном параграфе мы останавливаемся на некоторых вопросах принятия проектных решений при формировании облика измерительно-вычислительных комплексов, которые возникают в процессе их автоматизированного проектирования. Постановка и анализ возникающих здесь проблем необходимы при создании систем автоматизированного проектирования.

В данном параграфе излагаются некоторые общие положения организации и построения систем согласованных проектов (моделей), правила перехода от одних уровней детализации к другим, вводятся операции над моделями, рассматриваются вопросы выделения из всего множества проектов так называемых эффективных проектов.

С помощью современного аппарата исследования операций и некоторых положений из общей топологии обоснован в терминах проективного (индуктивного) предела последовательности множеств процесс создания САПР.

Задачи автоматизации проектирования и математического моделирования сложных технических систем требуют привлечения семейства математических моделей, определенным образом согласованных друг с другом [99, 100, 66, 67 и др.]. Пусть  $\mathfrak{M} = \{M_i = (X_i, \Phi_i, Y_i), i \in (I, \leq)\}$ , — семейство математических моделей типа «вход — выход», где  $X_i, Y_i$  — топологические отделимые пространства входов и выходов модели  $M_i$ ,  $\Phi_i$  — непрерывное отображение  $X_i$  в  $Y_i$ ,  $(I, \leq)$  — частично упорядоченное и фильтрующееся вправо (для любых  $i, j \in I$  найдется значение  $k \in I$  такое, что  $k \geq i, k \geq j$ ) множество индексов. Это

свойство  $I$  интерпретируется в том смысле, что сравнимые между собой индексы соответствуют моделям, полученным друг из друга детализацией (или агрегированием). Детализация (агрегирование) понимается следующим образом: на  $\mathfrak{M}$  задано двупараметрическое множество непрерывных отображений

$$\varphi_{ij} = (f_{ij}, g_{ij}) : (X_j, Y_j) \rightarrow (X_i, Y_i), \quad \forall i \leq j, i, j \in I,$$

такое, что для любых  $i \leq j \leq k, i, j, k \in I$ ,

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \varphi_{jk}, \quad \varphi_{ij} \varphi_{ji} = g_{ji} \varphi_{ij}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\varphi_{ii}$  считается тождественным отображением. Формализация связей, существующих между моделируемым объектом  $O = (X, \Phi, Y)$  и семейством моделей  $\mathfrak{M}$ , определяется набором отображений  $\varphi_i = (f_i, g_i) : (X, Y) \rightarrow (X_i, Y_i)$ , от которых естественно потребовать согласованности с отображениями  $\{\Phi_i\}$  и  $\{\varphi_{ij}\}$ :

$$g_i \Phi = \Phi_i f_i, \quad \varphi_i = \varphi_{ij}, \quad \forall i \leq j, i, j \in I. \quad (5.2)$$

Так, согласованное семейство моделей  $\mathfrak{M}$  является проективной системой. В силу (5.1), (5.2) существует проективный предел  $M_0 = (X_0, \Phi_0, Y_0) = \varprojlim (M_i, \varphi_{ij})$ , где  $X_0 \subset \prod \{X_i : i \in I\}$ ,  $Y_0 \subset \prod \{Y_i : i \in I\}$  — топологические подпространства,  $X_0 = \{x_i : x_i = f_{ij}(x_j), \forall i \leq j, i, j \in I\}$ ,  $Y_0 = \{y_i : y_i = g_{ij}(y_j), \forall i \leq j, i, j \in I\}$ , а  $\Phi_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  — непрерывное отображение, переводящее каждую нить  $x = \{x_i\} \in X_0$  в нить  $y = \{y_i = \Phi_i(x_i)\} \in Y_0$ ;  $M_0$  представляет собой «идеальную» модель. При этом существуют непрерывные отображения  $\varphi_i^0 = (f_i^0, g_i^0) : (X_0, Y_0) \rightarrow (X_i, Y_i)$ ,  $\forall i \in I$ ,  $g_i^0 \Phi_0 = \Phi_i f_i^0$ , и единственное отображение  $\varphi = (f, g) : (X, Y) \rightarrow (X_0, Y_0)$  такое, что  $\Phi_0 \varphi = g \Phi$ .

Поскольку «идеальную» модель  $M_0$  обычно трудно реализовать и изучать, то на практике ограничиваются одной или несколькими моделями из  $\mathfrak{M}$ . Оказывается, что если при выборе этих моделей следовать определенным принципам, то получаемая с их помощью информация об  $\mathfrak{M}$  соответствует информации, которую можно было бы получить из  $M_0$ .

**Предложение 1.** Пусть фиксирован  $x \in X$ ;  $y_i = \Phi_i f_i(x) \in Y_i$ . Тогда «усеченные нити»  $\{\{y_i : y_i \leq i\} : i \in (I, \leq)\}$  порождают сеть, сходящуюся к некоторому  $y_0 \in Y_0$  (в топологии  $\prod \{Y_i : i \in I\}$ ) такому, что  $y_0 = \Phi_0 x_0$ ,  $x_0 = f(x)$ ,  $y_0 = g \Phi x$ .

Пусть  $(I_1, \leq)$  — расширение  $(I, \leq)$  с сохранением порядка) такое, что  $I_1 = I \cup \mathfrak{A}$ ,  $I \cap \mathfrak{A} = \emptyset$  и  $\mathfrak{A}$  конфинантно в  $(I_1, \leq)$  (для каждого  $i \in I_1$  существует  $a \in \mathfrak{A}$  такое, что  $i \leq a$ ). При этом  $I = \bigcup \{I_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ ,  $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$ ,  $\forall \alpha \neq \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ ; каждое  $I_\alpha$  состоит из не сравнимых в  $(I, \leq)$  между собой элементов,  $a = \inf I_\alpha$ . Для любых  $\alpha \leq \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ ,  $j \in I_\beta$  существует индекс  $i \in I_\alpha$  такой, что  $i \leq j$ . Такое представление  $(I, \leq)$  назовем допустимым. Оно позволяет выделить из  $\mathfrak{M}$  подмножества  $S_\alpha = \{M_i \in \mathfrak{M} : i \in I_\alpha\}$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}$ , моделей одинакового уровня детализации. Система подмножеств  $\{G_\alpha \subseteq S_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называется представляющей  $M_0$ , если для любых  $\alpha \leq \beta$  из  $\mathfrak{A}$ ,  $M_i \in G_\beta$ ,  $i \leq j$ ,  $j \in I_\alpha$ , следует, что  $M_i \in G_\alpha$ ; при этом  $\varprojlim (G_\alpha, \varphi_{ij})$  представляет  $M_0$ . Это свойство полезно при различных аппроксимациях системы

$\{S_\alpha\}$ . Если же для любых  $x_1 \neq x_2$  из  $X$  найдутся  $\alpha \in \mathfrak{A}$ ,  $M_i \in G_\alpha$  такие, что  $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$  в  $X_i$ , а в случае  $\Phi x_1 \neq \Phi x_2$  справедливо  $\Phi f_i(x_1) \neq \Phi f_i(x_2)$ , то  $\{G_\alpha\}$  называется разделяющей системой моделей для  $\mathfrak{D}$ .

На каждом уровне  $S_\alpha$  зададим критерий качества моделей  $J_\alpha$  со значениями в  $(E_\alpha, Q_\alpha) \in \mathfrak{E}$ , где  $\mathfrak{E}$  — некоторое множество частично упорядоченных топологических пространств с замкнутыми порядками  $Q_\alpha$  (график  $Q_\alpha$  замкнут в  $E_\alpha^2$ ). Пусть подмножества  $P_\alpha = \omega - \text{ext } J_\alpha(S_\alpha) = \{M_i \in S_\alpha : \exists M_j \in S_\alpha, J_\alpha(M_i) \neq J_\alpha(M_j), J_\alpha(M_i) \times \times Q_\alpha J_\alpha(M_j)\}$  непусты для любого  $\alpha \in \mathfrak{A}$ . Это будет, в частности, когда  $J_\alpha(S_\alpha)$  — бикомпакт в  $(E_\alpha, Q_\alpha)$ .

Существует мнение что система  $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{M}, (E_\alpha, Q_\alpha), J_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \{J_\alpha\}$  — адекватна объекту  $\mathfrak{D}$ , если  $\{P_\alpha\}$  — разделяющая система моделей для  $\mathfrak{D}$  и  $\lim (P_\alpha, \varphi_{ij})$  представляет модель  $M_0$ . Рассмотрим монотонные непрерывные отображения  $e_{\alpha\beta} : E_\beta \rightarrow E_\alpha$ ,  $\alpha \leq \beta$  из  $\mathfrak{A}$ , и их свойства:

1) семейства отображений  $\{e_{\alpha\beta}\}$  и  $\{\varphi_{ij}\}$  согласованы следующим образом:  $e_{\alpha\beta} J_\beta = J_\alpha \varphi_{ij}$  для любых  $\alpha \leq \beta$  из  $\mathfrak{A}$ ,  $i \leq j$ ,  $i \in I_\alpha$ ,  $j \in I_\beta$ ;

2)  $e_{\alpha\beta}$  усиленно монотонно отображает  $J_\beta(S_\beta)$  в  $J_\alpha(S_\alpha)$  (если  $e_{\alpha\beta}(z_1) Q_\alpha \omega$ ,  $e_{\alpha\beta}(z_1) \neq \omega \in J_\alpha(S_\alpha)$ , то существует  $z_2 \in e_{\alpha\beta}^{-1}(\omega) \cap J_\beta(S_\beta)$ ,  $z_1 = z_2$ , такое, что  $z_1 Q_\beta z_2$ ;

3) для любых  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  из  $e_{\alpha\gamma} = e_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma}$ ,  $e_{\alpha\alpha}$  — тождественное отображение  $E_\alpha$  в  $E_\alpha$ . Смысл определения  $\{J_\alpha\}$ -адекватности проясняет следующее предложение.

**Предложение 2.** При выполнении свойств 1, 2 для отображений  $\{e_{\alpha\beta}\}$  система  $\mathfrak{B} \{J_\alpha\}$ -адекватна объекту  $\mathfrak{D}$  тогда и только тогда, когда отображение  $\varphi : (X, \Phi(X)) \rightarrow (X_0, Y_0)$  инъективно.

Нахождение множеств  $\{P_\alpha\}$  — одна из трудных задач векторной оптимизации. Поэтому пусть  $R_\alpha = R_\alpha(\gamma \in : \gamma \leq \alpha) \neq \emptyset$ ,  $R_\alpha = J_\alpha^{-1}(z_\alpha)$ ,  $z_\alpha \in J_\alpha(P_\alpha)$  — алгоритм построения некоторых аппроксимаций множеств  $\{P_\alpha\}$  (см., например, [66]).

**Предложение 3.** Если для  $e_{\alpha\beta}$  выполняется свойство 1) и имеет место равенство  $J_\beta(R_\beta) = e_{\alpha\beta}^{-1}[J_\alpha(R_\alpha)] \cap J_\beta(S_\beta)$  для всех  $\alpha \leq \beta$  из  $\mathfrak{A}$ , то  $\lim (R_\alpha, \varphi_{ij})$  представляет  $M_0$ .

Рассмотрим задачу оптимизации на объекте  $\mathfrak{D}$ . Пусть  $(E, Q) \in \mathfrak{E}$ ,  $J : X \times Y \rightarrow (E, Q)$  — критерий качества. Требуется найти множество  $N = \omega - \text{ext } J(B)$ , где  $B = \{(x, y) \in X \times Y : y = \Phi x\}$ . Для каждой модели  $M_i \in \mathfrak{M}$ ,  $i \in I_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}$ , пусть  $B_i^\alpha = \{u_i^\alpha = (x_i, y_i) \in X_i \times Y_i : y_i = \Phi x_i\}$ ,  $h_i^\alpha : X_i \times Y_i \rightarrow (E_i^\alpha, Q_i^\alpha) \equiv (E_\alpha, Q_\alpha)$  — непрерывный критерий качества и множество  $N_i^\alpha = \omega - \text{ext } h_i^\alpha(B_i^\alpha)$  — непусто. Заданы отображения  $b_i^\alpha : B \rightarrow B_i^\alpha$ ,  $q_i^\alpha : E \rightarrow E_i^\alpha$  со свойствами:  $b_i^\alpha = \varphi_{ij} b_j^\beta$ ,  $q_i^\alpha = e_{\alpha\beta} q_j^\beta$ ,  $q_i^\alpha$  монотонны,  $q_i^\alpha J = h_i^\alpha b_i^\alpha$  для любых  $\alpha \leq \beta$ ,  $i \leq j$ ,  $i \in I_\alpha$ ,  $j \in I_\beta$ , и система  $\{(E_i^\alpha, Q_i^\alpha), q_i^\alpha\}$  монотонно разделяет  $(E, Q)$  для любых несравнимых в  $(E, Q)$   $z, z_1$  найдутся  $\alpha \in \mathfrak{A}$  и  $i \in I_\alpha$ , что  $q_i^\alpha(z)$ ,  $q_i^\alpha(z_1)$  несравнимы в  $(E_i^\alpha, Q_i^\alpha)$ .

**Предложение 4.** Если для  $\{e_{\alpha\beta}\}$  выполняются свойства 1—3 (при замене  $J_\alpha, J_\beta$  на  $h_i^\alpha, h_j^\beta$ , а  $S_\alpha, S_\beta$  — на  $B_i^\alpha, B_j^\beta$  для любых  $\alpha \leq \beta$ ,  $i \leq j$ ,

$i \in I_\alpha, j \in I_\beta$ ), то существует непустой  $\lim_{\leftarrow} \{(B_i^\alpha, h_i^\alpha, (E_i^\alpha, Q_i^\alpha)), \{\Phi_{ij}, e_{\alpha, \beta}\}\} = (B_0, J_0, (E_0, Q_0))$  и единственные отображения  $b : B \rightarrow B_0$ ,  $q : E \rightarrow E_0$  такие, что  $qJ = J_0b$ ; в случае, когда  $\{(B_i^\alpha, h_i^\alpha, (E_i^\alpha, Q_i^\alpha))\}$  — разделяющая система моделей для  $(B, J, (E, Q))$ ,  $B$  сюръективно и  $N$  непусто, то  $b(N) = \lim_{\leftarrow} (N_i^\alpha, \Phi_{ij})$ . В частности,  $N$  непусто, если все  $N_i^\alpha$  бикомпактны.

Пусть критерий  $J_\alpha$  связан с  $\{h_i^\alpha : i \in I_\alpha\}$  соотношениями  $J_\alpha(M_i) = h_i^\alpha(u_i^\alpha)$ , где  $u_i^\alpha \in N_i^\alpha$  фиксированы для всех  $i \in I_\alpha$  так, что  $u_i^\alpha = \Phi_{ij}(u_j^\beta)$ ,  $\forall \alpha \leq \beta, i \leq j, i \in I_\alpha, j \in I_\beta$ . Если  $T_\alpha = \{u_i^\alpha : M_i \in P_\alpha\}$ , то  $\lim_{\leftarrow} (T_\alpha, \Phi_{ij})$  представляет некоторое  $T_0 \subseteq B_0$ .

**Предложение 5.** При выполнении предположений предложения 4 справедливо включение  $T_0 \subseteq b(N)$ . Этот результат позволяет ускорять сходимость по критерию качества в конкретных ситуациях.

Пусть  $U$  — гильбертово пространство,  $H_+ \subset H_0 \subset H_-$  — оснащенные гильбертовы пространства. Рассмотрим операторное уравнение  $Au = G(u, v)$ , где оператор  $A : H_+ \rightarrow H_-$  линеен и непрерывен,  $G$  — непрерывное отображение  $H_+ \times U$  в  $H_-$ . Критерий качества  $J : H_+ \times U \rightarrow (F, C)$  непрерывен,  $(F, C)$  — частично упорядоченное банахово пространство с базисом  $\{a_p\}_{p=1}^\infty$  и с замкнутым выпуклым конусом  $C$  положительных элементов.

Пусть уравнение имеет единственное решение  $u \in V \subset H_+$  при каждом  $v \in W \subset U$ , где  $V$  и  $W$  — фиксированные множества. К подобной формализации сводятся, например, задачи подвижного уравнения.

Пусть  $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset H_+$ ,  $\{h_i\}_{i=1}^\infty \subset H_-$ ,  $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset U$  — ортонормированные базисы,  $\{\pi_n : H_+ \rightarrow \text{Lin}\{e_i\}_{i=1}^n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\mu_m : H_- \rightarrow \text{Lin}\{h_i\}_{i=1}^m\}_{m=1}^\infty$ ,  $\{v_k : U \rightarrow \text{lin}\{v_j\}_{j=1}^k\}_{k=1}^\infty$  — системы ортопроекторов,  $\{\eta_s : F \rightarrow \text{Lin}\{d_p\}_{p=1}^s\}_{s=1}^\infty$  — проекторы в  $F$ . Обозначим  $(I, \leq) \subseteq \{i = (m, n, k) : m, n, k = 1, 2, \dots; i_1 \leq i_2 \Leftrightarrow m_1 \leq m_2, n_1 \leq n_2, k_1 \leq k_2\}$ .

Пусть  $(I, \leq)$  — допустимое представление  $(I, \leq)$  такое, что  $(E_\alpha, Q_\alpha) = E_{\alpha(s)} = \text{Lin}\{d_p\}_{p=1}^s$  с индуцированным частичным порядком из  $(F, C)$ ,  $h_i^{\alpha(s)} = \eta_s J | \pi_n H_+ \times v_k U$ ,  $\Phi_{i_1, i_2} = (v_{k_1}^{k_2}, \pi_{n_1}^{n_2})$ ,  $v_{k_1}^{k_2}, \pi_{n_1}^{n_2}$  — ортопроекторы из  $v_{k_2} U \times \pi_{n_2} H_+$  в  $v_{k_1} U \times \pi_{n_1} H_+$ ,  $i_1 \leq i_2$ . При этом заданы монотонные отображения  $e_{\alpha, \beta} : E_{\beta(s_1)} \rightarrow E_{\alpha(s)}$ ,  $s_1 \geq s$ , удовлетворяющие условиям предложения 4, где  $B_i^{\alpha(s)} = \{(v_k, u_n) \in v_k W \times \pi_n V : \mu_m A u_n = \mu_m G(u_n, v_k)\}$ .

**Предложение 6.** Если множества  $N$  и  $N_i^{\alpha(s)} = \omega - \inf h_i^{\alpha(s)}(B_i^{\alpha(s)})$  непусты, для любых  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $i \in I_\alpha$ , то  $N$  аппроксимируется системой  $\{N_i^{\alpha(s)}\}$  (в проективном смысле).

Пусть  $I$  наделено вполне регулярной отделимой топологией  $\tau$ , заданы отображения  $\Psi_i : Y_i \rightarrow Y$ , где пространство выходов  $Y$  объекта  $\mathfrak{D}$  — рефлексивное или сепарабельное сопряженное банахово пространство, причем отображение  $\Psi_i \Phi_{ij}(x)$  ограничено и непрерывно по  $i \in (I, \tau)$  для любого  $x \in X$ . На  $(I, \tau)$  определена «априорная» вероят-

ностная борелевская регулярная мера  $\mu(i)$  со свойством

$$\int_I \|\Psi_i \Phi_i f_i(x)\|_Y d\mu(i) > 0 \quad (5.3)$$

для любого  $x \in X$ . Ее задание соответствует выделению из классов моделей, в большей или меньшей степени удовлетворяющих целям и априорным знаниям исследователя. Отсюда получаем (5.3).

*Предложение 7.* Если выполняется (5.3), то для любого входа  $x \in X$  существует интегрируемая оператор-функция  $H(x, \cdot) : (I, \tau) \rightarrow L(Y, Y)$  такая, что

$$\Phi(x) = \int_I H(x, i) \Psi_i \Phi_i f_i(x) d\mu(i).$$

Оказывается, что в ряде частных случаев «апостериорная» оператор-функция  $H(x, i)$  восстанавливается в явном виде в результате использования дополнительной информации о моделях из  $\mathfrak{M}$ . Изложенные результаты использовались при проектировании измерительно-вычислительного комплекса конкретного назначения.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов А. А. Вариант метода прогонки.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, 1, № 2, с. 349—351.
2. Абрамов А. А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) — Там же, № 3, с. 542—545.
3. Арашунян О. Б., Залеткин С. Ф., Захаров А. Ю., Калиткин Н. Н. О тестировании программ решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— М., 1983.— 20 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 139).
4. Бадалов Ф. Б., Хашимов Ж. О методах сведения краевых задач теории упругости к задачам Коши.— Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1981, № 4, с. 42—46.
5. Белов Ю. А. Об алгоритме кусочно-многочленного приближения.— Вычисл. и прикл. математика, 1971, вып. 14, с. 77—83.
6. Белов Ю. А. Разложение двухэтапных задач стохастического программирования блочного типа.— Докл. АН СССР, 1980, 255, № 4, с. 811—813.
7. Белов Ю. А. Блочная стохастическая задача оптимизации с вероятностными ограничениями и детерминированным решением.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 8, с. 61—64.
8. Белов Ю. А. Блочная двухэтапная задача стохастического программирования с непрерывным распределением вектора ограничений.— Кибернетика, 1980, № 1, с. 128—130.
9. Белов Ю. А. Монотонность по функционалу итеративного алгоритма для блочной задачи со случайными параметрами.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, 20, № 2, с. 298—305.
10. Белов Ю. А., Макаров В. Л., Шелепов В. Г., Шульженко В. Б. Верификация схем-моделей для импульсных РТС.— Кибернетика, 1981, № 5, с. 40—47.
11. Белов Ю. А., Макаров В. Л. О методологии математического моделирования сложных информационно-измерительных систем.— М., 1980.— 22 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2553, 11.03.85.
12. Белов Ю. А., Донченко В. С., Макаров В. Л., Цитрицкий О. Е. Об одной схеме последовательного усложнения математических моделей.— Кибернетика и вычисл. техника, 1981, № 51, с. 55—59.
13. Белов Ю. А. Одноэтапная стохастическая задача блочного типа с построчными вероятностными ограничениями.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, 21, № 5, с. 1133—1139.
14. Белов Ю. А. Декомпозиция динамических задач управления в условиях неопределенности.— Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 11, с. 1923—1931.
15. Белов Ю. А. Итеративное разложение стохастических оптимизационных задач с уравнениями в частных производных первого порядка.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1982, 22, № 3, с. 582—592.
16. Белов Ю. А., Диденко В. П., Козлов Н. Н. и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 1. Обработка измерений при исследовании сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1982.— 304 с.

17. Белов Ю. А., Диденко В. П., Козлов Н. Н. и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 2. Математические модели при измерениях.— Киев : Наук. думка, 1983.— 264 с.
18. Белов Ю. А. Стохастическая нормальная модель с решающими распределениями для экстремальной задачи блочного типа.— Кибернетика, 1983, № 2, с. 72—77.
19. Белов Ю. А., Касьянюк В. С. Максимально-правдоподобное восстановление функций-сигналов по конечному множеству данных.— Докл. АН УССР. Сер. А. 1985, № 12, с. 64—67.
20. Белов Ю. А., Цитрицкий О. Е. Об одной схеме автоматизации проектирования сложных систем.— Докл. АН СССР, 1985, 285, № 3, с. 571—574.
21. Белов Ю. А., Касьянюк В. С. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент при исследовании проблемы восстановления функций-сигналов по конечному множеству данных : Докл. на II Междунар. симпоз. по систем. анализу и имитации, ГДР, Берлин, 26—31 августа 1985 г. Akademie Verlag Berlin, 1985.
22. Белов Ю. А., Козлов Н. Н., Ляшко И. И. и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 3. Основы теории математического моделирования сложных радиотехнических систем.— Киев : Наук. думка, 1985.— 270 с.
23. Беркович Е. М. О существовании оптимальных решений для одного класса двухэтапных стохастических экстремальных задач.— В кн.: Приближенные методы решения задач для оптимального управления и некоторых некорректных обратных задач : Тр. ВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, М. : Изд-во Моск. ун-та, 1972, с. 34—47.
24. Бондарчук П. И. Численные методы устойчивости линейной коррекции.— В кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения. Львов : Изд-во Львов. ун-та, 1985, с. 10—12. (Вестн. Львов. политехн. ин-та; № 192).
25. Бондарчук П. И. Специализированные итерационные численные методы устойчивой коррекции и решение «жестких» задач.— Львов, 1985.— 19 с.— Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1241, 11. 03.85.
26. Борисов Ю. П., Цветков В. В. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств.— М. : Радио и связь, 1985.— 177 с.
27. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления.— М. : Мир, 1972.— 242 с.
28. Быков А. А., Ильинский А. С. Решение краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом направленной ортогонализации.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1979, 19, № 3, с. 631—639.
29. Быков А. А. Устойчивый численный метод решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1980, 251, № 5, с. 1040—1044.
30. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.— М. : Машиностроение, 1976.— 278 с.
31. Варюхин В. А., Касьянюк С. А. Об одном методе решения нелинейных систем специального вида.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1966, 6, № 2, с. 347—352.
32. Варюхин В. А., Касьянюк С. А. Об итерационных методах уточнения корней уравнения.— Там же, 1969, 9, № 3, с. 684—687.
33. Варюхин В. А., Касьянюк С. А. Об итерационных методах решения нелинейных систем.— Там же, 1970, 10, № 6, с. 1533—1536.
34. Варюхин В. А., Касьянюк С. А. Об одном классе итерационных процедур решения систем нелинейных уравнений.— Там же, 1977, 17, № 5, с. 1123—1131.
35. Васильев Ф. П. Итерационный метод с сингулярным возмущением для решения краевых задач.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Саратов, 1981, с. 60—70.
36. Васильев Ю. П. Итерационный метод с сингулярным возмущением для решения краевых задач.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Саратов, 1981, с. 60—70.
37. Ватель И. А., Флеров Ю. А. Модель годового планирования в отрасли.— В кн.: Программный метод управления. М. : ВЦ АН СССР, 1976, вып. 3, с. 41—60.
38. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1981.— 512 с.

39. *Ворович И. И., Зипалова В. Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши.— Прикл. математика и механика, 1965, 29, вып. 5, с. 894—901.
40. *Гайдук В. Ф.* Метод регуляризации системы стыковки при решении нелинейных двухточечных краевых задач.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 7, с. 6—8.
41. *Гайдук А. Ф.* О методе последовательных интервальных пристрелок для монотонных систем.— Там же, 1981, № 12, с. 6—8.
42. *Герасимов Б. П., Кульчицкая И. А.* STIFSP-пакет программ интегрирования дифференциально-алгебраических систем большой размерности.— М., 1984.— 23 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 103).
43. *Герасимов Б. П., Кульчицкая И. А.* Об одном подходе к построению линейных многошаговых методов.— М.; 1984 — 22 с.— / (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 104).
44. *Глушков В. М., Пшеничный Б. Н., Буланый А. П.* Параллельный алгоритм решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений.— Кибернетика, 1980, № 6, с. 68—71.
45. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1961, 16, вып. 3, с. 171—174.
46. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы : Учеб. пособие для математ. специальностей.— М. : Наука, 1977.— 440 с.
47. *Головкин Б. А.* Параллельная обработка информации : Программирование, вычислительные методы, вычислительные системы.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1979, № 2, с. 116—151.
48. *Григолюк Э. И., Мамай В. И.* О методах сведения нелинейной краевой задачи к задаче Коши.— В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 1979, с. 13—19.
49. *Ермолов Ю. М.* Методы стохастического программирования.— М. : Наука, 1976.— 139 с.
50. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения.— М. : Наука, 1968.— 448.
51. *Захаров А. Ю., Турчанов В. И.* STIFF-программа для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений (адаптация для ЭВМ БЭСМ-6) : Инструкция Ин-та прикл. математики АН СССР. Москва, 1977, № 63.— 24 с.
52. *Захаров А. Ю.* Некоторые результаты сравнения эффективности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.; 1979.— 32 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 81).
53. *Ильин В. П.* Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применения к исследованию сходимости вариационных процессов : Тр. мат. ин-та АН СССР. 1959, 53, с. 62—89.
54. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— 2-е стереот. изд.— М. : Наука, 1977.— 742 с.
55. *Касьянюк С. А.* К методу моментов в теории оптимального управления.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 8, с. 69—70.
56. *Касьянюк С. А.* К вопросу интерполяции диаграммы направленности антенны с линейным раскрытием.— Радиотехника и электрон., 1971, 16, № 6, с. 1061—1063.
- 56а. *Касьянюк С. А., Ткачук Г. И.* Об экстремальных напряжениях в плоской задаче теории упругости.— Прикл. математика и механика, 1971, 35, № 2, с. 369—375.
- 56б. *Касьянюк С. А.* Математическое программирование и задача условного экстремума в специальных классах аналитических функций.— Сиб. мат. журн., 1969, 10, № 6, с. 1224—1233.
57. *Касьянюк С. А.* О методе моментов теории оптимального управления при входных воздействиях с различными энергиями.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 4, с. 5—10.
58. *Касьянюк С. А.* О восстановлении функций-сигналов по заданным элементам в конечном числе точек.— Пробл. передачи информ., 1973, 9, № 2, с. 24—30.
59. *Касьянюк С. А.* Интерполяция диаграмм направленности антенн с плоским раскрытием.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, № 3, с. 390—398.
60. *Касьянюк С. А.* Об оптимальной интерполяции изображения, сформированного оптической системой.— Оптика и спектроскопия, 1975, 39, № 6, с. 1170—1174.

61. Касьянюк С. А. Аппроксимация и интерполяция функциями с финитным спектром.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1976, 16, № 2, с. 508—514.
62. Касьянюк С. А. К задаче интерпретации данных, полученных с помощью дискретного множества рецепторов.— Там же, 1981, 21, № 3, с. 553—560.
63. Касьянюк С. А. Оценка погрешности восстановления сигналов по конечному числу отсчетов.— Пробл. передачи информ., 1984, 20, № 3, с. 96—101.
64. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа : Учеб. пособие для мат. специальностей.— М. : Наука, 1981.— 454 с.
65. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1966.— 332 с.
66. Краснощекоев П. С., Морозов В. В., Федоров В. В. Декомпозиция в задачах проектирования.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1979, № 2, с. 7—17.
67. Краснощекоев П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М. : Изд-во МГУ, 1983.— 264 с.
68. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы.— М. : Наука, 1977. Т. 2.
69. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов (дифференциальные уравнения).— Минск : Наука и техника, 1982.— 286 с.
70. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ : Учеб. пособие для мат. специальностей.— 2-е изд., перераб.— М. : Высш. шк., 1973. 614 с.
71. Куржанский А. Б. Управление и наблюдения в условиях неопределенности.— М. : Наука, 1977.— 391 с.
72. Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях.— Мат. сб., 1982, 117 (159), № 4, с. 469—480.
73. Лурье А. И. Применение принципа максимума Понтрягина к простейшим задачам механики.— Тр. Ленингр. политехн. ин-та 1965, № 252, с. 34—46.
74. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем.— М. : Наука, 1975.— 431 с.
75. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений : Учеб. пособие для мат. специальностей.— Киев : Вища шк. 1977.— 408 с.
76. Макаров В. Л., Самарский А. А. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— М., 1979.— 30 с.— (Препринт) АН СССР Ин-т прикл. математики; № 113).
77. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы.— М. : Наука, 1981.— 416 с.
78. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Сплайн-аппроксимация функций.— М. : Высш. шк., 1983.— 80 с.
79. Макаров В. Л. Разностные схемы второго порядка точности для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях из  $W_2^2$ .— Докл. АН СССР, 1982, 262, № 1, с. 22—26.
80. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М. : Наука, 1977.— 455 с.
81. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем.— М. : Наука, 1982.— 285 с.
82. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.— М. : Наука, 1971.— 424 с.
83. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем.— М. : Наука, 1975.— 528 с.
84. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации.— М. : Наука, 1978.— 351 с.
85. Монастырный П. И. О сходимости метода интервальной пристрелки.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1978, 18, № 5, с. 1139—1145.
86. Монастырный П. П., Фридлянд П. Т. Некоторые вопросы теории и практической реализации методов пристрелки.— Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат., 1980, № 3, с. 10—17.
87. Монастырный П. И. О связи изолированности решений со сходимостью методов пристрелки.— Дифференц. уравнения, 1980, 16, № 4, с. 732—740.
88. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М. : Мир, 1975.— 558 с.

89. Павловский Ю. Н. Теория факторизации и декомпозиции управляемых динамических систем и ее приложения.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1984, № 2, с. 45—57.
90. Платонов А. К. Двухуровневый метод ускоренного численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.; 1981.— 32 с. (Препринт/АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 119).
91. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1969.— 384 с.
92. Пытьев Ю. П., Шишмарев И. А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.— 252 с.
93. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноуцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем.— М.: Наука, 1979.— 122 с.
94. Раздольский Л. Г. Оптимальное управление в теории взрыва газовоздушных смесей.— В кн.: Тр. 3-й зим. шк. по мат. программированию и смежным вопр., 1970, вып. 2, с. 128—136.
95. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.— 469 с.
96. Ронто В. А. Об определении начальных значений решений нелинейных краевых задач методом продолжения решения по параметру.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 1, с. 128—133.
97. Самарский А. А. Теория разностных схем: Учеб. пособие для мат. специальностей.— М.: Наука, 1977.— 656 с.
98. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений: Учеб. пособие для матем. специальностей.— М.: Наука, 1978.— 592 с.
99. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.— Вестн. АН СССР, 1979, № 5, с. 38—49.
100. Самарский А. А. Вести широкую пропаганду идей и методов вычислительного эксперимента.— Там же, 1981, № 3, с. 61—65.
101. Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Роцин В. А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации.— Киев: Наук. думка, 1980.— 275 с.
102. Свирижев Ю. М., Елизаров Е. Я. Математическое моделирование биологических систем.— М.: Наука, 1972.— 196 с.
103. Словенский Р. В. Одношаговые итерационные численные методы решения дифференциальных уравнений.— Львов, 1985.— 15 с.— Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 1242, 11.03.85.
104. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под общ. ред. Дж. Холла и Дж. Уатта.— М.: Мир, 1979.— 312 с.
105. Суханов А. А. Метод решения нелинейных двухточечных краевых задач.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, 23, № 1, с. 228—231.
106. Тер-Крикоров А. М. Вопросы выпуклого программирования в пространстве, сопряженном пространству Банаха, и задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями.— Там же, 1976, 16, № 3, с. 351—358.
107. Тер-Крикоров А. М. Оптимальное управление и математическая экономика.— М.: Наука, 1977.— 216 с.
108. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972.— 732 с.
109. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач: Учеб. пособие для математ. специальностей.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1979.— 288 с.
110. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для физ.-мат. специальностей.— М.: Наука, 1980.— 232 с.
111. Треногин В. А. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.— 496 с.
112. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, 1, № 5, с. 922—927.
113. Федоренко Р. П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений.— Успехи мат. наук., 1973, 28, вып. 2 (170), с. 121—182.
114. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.— 488 с.
115. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.

- 115а. *Цыпинас И. К.* Применение теории оптимального управления в задачах синтеза сжатых стержней.— Литов. мех. сб., 1970, № 2, с. 17—32.
116. *Цурков В. И.* Двухэтапная задача стохастического программирования блочного типа.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1978, 18, № 2, с.360—369.
117. *Цурков В. И.* Принцип декомпозиции для блочно-сепарабельных систем.— Докл. АН СССР, 1979, 246, № 1, с. 27—31.
118. *Цурков В. И.* Итеративный метод декомпозиции для экстремальных задач.— Там же, 1980, 250, № 2, с. 304—307.
119. *Цурков В. И.* Декомпозиция в задачах большой размерности.— М.: Наука, 1981.— 351 с.
120. *Цурков В. И.* Оптимизация многомерных систем с распределенными параметрами.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 16—24.
121. *Цурков В. И.* Двухуровневые системы оптимального управления.— Там же, 1984, № 4, с. 45—59.
122. *Черноуцко Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях.— М.: Наука, 1978.— 351 с.
123. *Чуа Л. О., Пен-Мин Лин.* Машинный анализ электронных схем.— М.: Энергия, 1980.— 638 с.
124. *Шиманский В. Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ.— Киев: Наук. думка, 1966.— Ч. 2.— 224 с.
125. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации.— М.: Сов. радио, 1974.— 398 с.
126. *Aktas L., Steifer H. J.* A classification and survey of numerical methods for boundary value problems in ordinary differential equations.— Int. J. Numer. Math. Eng., 1977, 11, N 5, p. 771—796.
127. *Dahlquist L.* A special stability problem for linear multistep methods.— BIT (Sver), 1963, 13, N 3, p. 27—43.
128. *Daniel J. W.* A road map of methods for approximating solutions of two — point boundary-value problems.— Lect. Notes Comput. Sci., 1979, 76, p. 1—18.
129. *Deufhard P., Pesch H. J., Rentrop P.* A modified continuation method for the numerical solution of nonlinear two —point boundary value problems by shooting techniques.— Numer. Math., 1976, 26, N 2, p. 327—343.
130. *Deufhard P.* A stepsize control for continuation methods and its special application to multiple shooting techniques.— Ibid., 1979, 33, N 2, p. 115—146.
131. *Diekhoff H. J., Lory P., Oberle H. J.* Comparing routines for the numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations in multiple shooting.— Ibid., 1977, 27, N 4, p. 449—469.
132. *Eisenstat S. C., Gursky M. C., Shultz M. N., Sherman A. N.* Yale Sparse Matrix Packade.— Res. Rept., N 114, Dept. Comput. Sci., Yale Univer.
133. *Gear C. W.* Algorithm 407, DIFSUB for solution of ordinary differential equations.— Commun. ACM, 1971, 14, p. 185—190.
134. *Gear C. W.* Simultaneous numerical solution of differentialalgebraic equations.— IEEE Trans. Circuit. Theory, 1971, 18, N 1, p. 89—95.
135. *Harier E.* Nonlinear stability of RAT, an explicit retional Runge — Kutta Method.— BIT (Sver), 1979, 19, N 4, p. 540—542.
136. *Hermann M., Berndt H.* A multiple shooting code for nonlinear two-point boundary value problems.— Numer. Behndl. Differentialgleich., 1981, N 23, p. 54—58.
137. *Kahaner D., Sutherland C. D.* STIFF — a subroutine packade for solving ordinary differential equations with prescribed initial-conditions.— Los-Alamos. Sci. Lab., 1975, 205, N 4, p. 42—56.
138. *Keller H. B.* Numerical methods for two—point boundary value problems.— New York: Blaisdill, 1968.— 184 p.
139. *Lambert I. D.* Nonlinear methods for stiff systems of ordinary differential equations.— Lect. Notes Math., 1974, 363, p. 75—88.
140. *Lambert I. D.* Computational methods in ordinary differential equations.— London; New York, 1973.— 278 p.
141. *Lear C. W.* The numerical integration of stiff differential equations. Urbana, III. Univ. III. Dep. Comput. Sci. Rept. 1967, N 221.— 24 p.

142. *Lear C. W.* Numerical solution ordinary differential equations : is there anything left to do?— *SIAM Rev.*, 1981, **23**, N 1, p. 10—21.
143. *Lory P.* Enlarging the domain of convergence for multiple shooting by the homotopy method.— *Numer. Math.*, 1980, **35**, N 2, p. 231—240.
144. *Lory P.* Numerical solution of kidney model by multiple shooting.— *Math. Bio-sciences*, 1980, **50**, N 1, p. 117—128.
145. *Matausek M. R.* On Warners algorithm for the solution of boundary value problems for ordinary differential equations.— *Optimiz. Theory and Appl.*, 1976, **20**, N 1, p. 37—46.
146. *März R.* On difference and shooting methods for boundary value problems in differential algebraic equations.— Berlin, 1982, p. 1—31.— (Preprint Humboldt-Universität; N 24).
147. *Nordsiek A.* On the numerical integration of ordinary differential equations.— *Math. Comput.*, 1962, **16**, N 4, p. 22—49.
148. *Orava P. J.*, *Lautala P. J.* Back and forth shooting method for solving two — point boundary value problems.— *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1977, **23**, N 2, p. 217—227.
149. *Roberts S. M.*, *Shipman J. S.* Two-point boundary value problems: shooting methods.— New York : Elsevier, 1972.— 269 p.
150. *Takeo Ojika.* Initial value adjusting method and graph theoretical analysis for the solution of nonlinear multipoint boundary value problems with varying system demensions.— *J. Math Anal. and Appl.*, 1982, **86**, N 1, p. 123—136.
151. *Troesch B. A.* A simple approach to a sensitive two — point boundary value problem.— *J. Comput. Phys.*, 1976, **21**, N 3, p. 279—290.
152. *Ueberhuber C. W.* Implementation of defect correction methods for stiff differential equations.— *J. Comp. and Appl. Math.*, 1979, **23**, N 3, p. 205—232.
153. *Wambecq A.* Solution of the equations associated with retional Runge—Kutta methods of orders up to four.— *Ibid.*, 1980, **6**, N 4, p. 275—281.
154. *Porter W. A.* Data Interpolation, Cansality, Structure, and System Identification.— *Information and Control*, 1975, N 29, p. 217—233.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
-----------------------	---

ГЛАВА I . . . . .	7
-------------------	---

---

## **ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

§ 1. Метод стрельбы с прерыванием пристрелочных траекторий при их выходе из некоторого множества . . . . .	10
§ 2. Метод последовательной стрельбы на подотрезках отрезка интегрирования . . . . .	38
§ 3. Численное решение тестовых и прикладных задач . . . . .	54
§ 4. Численные методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	65
§ 5. Итерационные численные методы . . . . .	83

ГЛАВА II . . . . .	104
--------------------	-----

---

## **ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕГЛАДКОЙ ВХОДНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ-СИГНАЛОВ ПО КОНЕЧНОМУ МНОЖЕСТВУ ДАННЫХ**

§ 1. Интерпретация результатов наблюдений по неполным данным	104
§ 2. Задача восстановления функций-сигналов и ее приложения	125
§ 3. Сеточный метод решения линейного и нелинейного интегральных уравнений Фредгольма второго рода . . . . .	138
§ 4. Решение нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна . . . . .	173
§ 5. Решение нелинейного интегрального уравнения Урысона	189
§ 6. Сеточные схемы для двухмерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода . . . . .	198
§ 7. Некоторые вопросы интерполирования нелинейных операторов в функциональных пространствах . . . . .	208



**ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ  
БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

§ 1. Разложение двухэтапных задач стохастического программирования блочного типа . . . . .	212
§ 2. Разложение задач оптимального управления . . . . .	221
§ 3. Разложение управляемых динамических процессов со случайными возмущениями . . . . .	235
§ 4. Декомпозиция динамических задач управления в условиях неопределенности . . . . .	240
§ 5 Декомпозиция в задачах проектирования сложных систем . .	250

<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>255</b>
------------------------------------	------------

*Юрий Анатольевич Белов  
Николай Николаевич Козлов  
Иван Иванович Ляшко  
Владимир Леонидович Макаров  
Олег Евгеньевич Цитрицкий*

---

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

**Т. 4**

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОЖНЫХ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Утверждено к печати ученым советом  
Киевского государственного университета  
им. Т. Г. Шевченко*

Редактор В. П. ЕГОРОВА

Оформление художника Д. Д. ГРИБОВА

Художественный редактор И. П. АНТОНЮК

Технический редактор В. А. КРАСНОВА

Корректоры Е. А. МИХАЛЕЦ, Т. В. ПАНТЕЛЕЙМОНОВА

ИБ № 7187

Сдано в набор 01.04.86. Подп. в печ. 03.10.86. БФ 36424. Формат 60×90/16.  
Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 16,5. Усл. кр.-отт. 17,06. Уч.-  
изд. л. 16,0. Тираж 2500. экз. Заказ 6-399. Цена 2 р. 80 к.

Издательство «Наукова думка». 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига». 252057, Киев, ул. Довженко, 3 на книжной фабрике «Коммунист». 310012 Харьков 12, ул. Энгельса, 11.



2 р. 80 к.

«НАУКОВА ДУМКА»